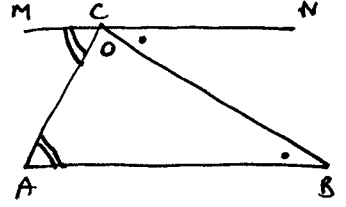


## IL POSTULATO DI EUCLIDE

« DATI UNA RETTA  $\ell$  ED UN PUNTO P FUORI DI ESSA, LA PARALLELA CONDOTTA DA P AD  $\ell$  È UNICA »

QUESTO POSTULATO FU ENUNCIATO PER LA PRIMA VOLTA DA EUCLIDE NEI SUOI "ELEMENTI", ED ESSENDO IL QUINTO NEU' ORDINE VIENE CHIAMATO IL "QUINTO POSTULATO DI EUCLIDE", DA LUI COSÌ ENUNCIATO: « LA SOMMA DEGLI ANGOLO INTERNI DI UN TRIANGOLO È PARI AD UN ANGOLO PIATTO ». INFATTI, SIA IL TRIANGOLO  $ABC$  E SI CONDUCA DA C LA PARALLELA AL LATO AB. SE LA PARALLELA È UNICA, ALLORA (VEDI FIG.) SONO UNICI GLI ANGOLO  $ACM$  E  $BCN$ , E SONO CONGRUENTI RISPETTIVAMENTE A  $BAC$  E AD  $ABC$  (PERCHÈ ALTERNI INTERNI); DUNQUE, LA SOMMA DEI TRE ANGOLO INTERNI DEL TRIANGOLO PUÒ VALERE SOLO  $180^\circ$ , ED I DUE ENUNCIATI SONO EQUIVALENTI.

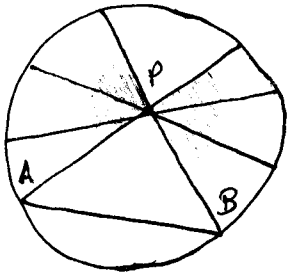


QUESTO POSTULATO HA UN POSTO DI GRANDE RILIEVO IN GEOMETRIA. INFATTI NON TUTTI I MATEMATICI ACCETTARONO LA SUA INDIMOSTRABILITÀ E TENTARONO IN TUTTI I MODI DI PERVENIRE AD UNA SUA DIMOSTRAZIONE.

TRA QUESTI VA CITATO GEROLAMO SACCHERI (1667-1733). EGI ERA CONVINTO CHE TALE POSTULATO POTESSE ESSERE DEBITO DAL PRECEDENTI, E COSÌ PROVÒ A NEGARLO NELLA SPERANZA DI POTERLO DIMOSTRARE PER ASSURDO. IN REALTÀ, EGI DEUSSSE SENZA ACCORGERSENE I TEOREMI DI UNA NUOVA GEOMETRIA: UNA GEOMETRIA INDIPENDENTE DA QUELLO EUCLIDEA, E DETTA PERCIÒ NON EUCLIDEA.

L'OPERA DI SACCHERI FU DIMENTICATA DOPO LA SUA MORTE, FINCHÈ IL GRANDE KARL FRIEDRICH GAUSS (1777-1855) NON LA RISCOPRÌ E NON TENTÒ DI COSTRUIRE VOLUNTARIAMENTE UNA GEOMETRIA PER CUI NON È VALIDO IL POSTULATO DI EUCLIDE, MA NON PUBBLICÒ MAI I SUOI RISULTATI. A GIUNGERE PER PRIMI AD UNA GEOMETRIA NON EUCLIDEA, LAVORANDO INDIPENDENTEMENTE L'UNA DALL'ALTRA, FURONO IL RUSSO NIKOLAJ LOBACEVSKIJ (1793-1856) E L'UNGHERESE JANOS BOLYAI (1802-1860).

ESSI FECERO L'IPOTESI CHE PER UN PUNTO FUORI DI UNA RETTA PASSINO INFINITE PARALLELE ALLA RETTA DATA, E COSTRUIRONO UNA GEOMETRIA DETTA IPERBOLICA.



ALLO SCOPO, ESSI CHIAMARONO "PIANO" QUELLO CHE PER EUCLIDE ERA UN CERCHIO, RETTA OGNI CORDA DELLO STESSO (ESCLUSI GLI ESTREMI). I PRIMI POSTULATI DELLA GEOMETRIA EUCLIDEA VALGONO ANCHE IN QUESTA, POICHÈ TRE PUNTI INDIVIDUANO UNA SOLA "RETTE" ED OGNI "RETTE" DIVIDE IL "PIANO" IN DUE "SEMPIANI" (SEZMENI DI CERCHIO) PER I QUALI VALE L'ASSIOMA DI PARTIZIONE. TUTTAVIA, NON VALE PIÙ IL 5° POSTULATO: SE SI DEFINISCE INFATTI "PARALLELA" AD AB LA "RETTE" CHE NON HA

INTERSEZIONI CON ESSA, COME SI VEDE IN FIGURA, LE "RETTE" PARALLELE AD AB SONO LE INFINITE RETTE CONTENUTE NEGLI ANGOLO OMBREGGIATI, COMPRESI TRA PA E PB. SI PUÒ DIMOSTRARE CHE NELLA GEOMETRIA IPERBOLICA VALGONO ANCORA MOLTI TEOREMI DI GEOMETRIA EUCLIDEA, PER ES. GLI ANGOLO OPPOSTI AL VERTICE SONO CONGRUENTI, MA NON È PIÙ VERO CHE LA SOMMA DEGLI ANGOLO INTERNI DI UN TRIANGOLO È PARI AD UN ANGOLO PIATTO.

SUCCESSIVAMENTE) SETAPRE MEZANDO IL 5° POSTULATO, GEORGE RIEMANN (1826-1866) COSTRUI UN'ALTRA GEOMETRIA, DETTA ELIPTICA, IN CUI PER UN PUNTO NON SI PUÒ CONDUERE NESSUNA PARALLELA AD UNA RETTE DATA. UN ESEMPIO? SI PRENDA COME "PIANO"

UNA SUPERFICIE SFERICA EUCLIDEA E COME "RETTE" I SUOI CERCHI MASSIMI, MENTRE "PUNTI" SONO LE COPPIE DI PUNTI EUCLIDEI ANTIPODI SULLA SFERA, AD ES. (A, A'). COME SI VEDE, NESSUN CERCHIO MASSIMO PUÒ ENTARE DI INTERSECCARE UNO DATO, E DUNQUE LE RETTE PARALLELE NON ESISTONO PIÙ. MEZANDO IL 5° POSTULATO, INFATTI, SONO STATE CREATE DELLE NUOVE GEOMETRIE.

