PROBABILITÀ CONDIZIONATA E EVENTI INDIPENDENTI

SI PARLA DI PROBABILITÀ CONDIZIONATA QUANDO SI VUOLE CALCOLARE LA PROBABILITÀ DI UN EVENTO A, SAPENDO CHE SI È GIÀ VERIFICATO UN EVENTO B. L'INFORMAZIONE AGGIUNTIVA CHE DERIVA DA TALE EVENTO PUÒ INFATTI MODIFICARE LA PROBABILITÀ CHE SI VERIFICHI A. ESEMPIO: SI È LANCIATA DUE VOLTE UNA MONETA NON TRUCCATA. QUAL È LA PROBABILITÀ CHE SIA SORTITA TESTA IN ENTRAMBI I LANCI, SAPENDO CHE NEL PRIMO LANCIO È USCITA TESTA? E SAPENDO CHE IN ALMENO UNO DEI DUE LANCI È USCITA TESTA? LO SPAZIO DEGLI EVENTI IN QUESTO CASO È:

$$\{(T,T);\ (T,C);\ (C,T);\ (C,C)\}$$

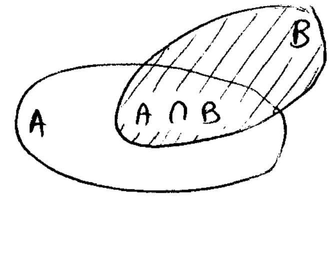
E LA PROBABILITÀ DI OTTENERE TESTA DUE VOLTE, IN ASSENZA DI ALTRE INFORMAZIONI, È $1/4$. MA SAPERE CHE NEL <u>PRIMO</u> LANCIO È USCITA TESTA, PERMETTE DI RESTRINGERE LO SPAZIO DEGLI EVENTI A $\{(T,T);\ (T,C)\}$. ORA I CASI POSSIBILI SONO SOLO DUE CONTRO UNO FAVOREVOLE, QUINDI LA PROBABILITÀ È DIVENTATA $1/2$! SE INVECE IO SO CHE IN <u>ALMENO</u> UNO DEI DUE LANCI È USCITA TESTA, POSSIAMO ELIMINARE SOLO L'EVENTO (C,C) E LO SPAZIO DEGLI EVENTI DIVENTA $\{(T,T);\ (T,C);\ (C,T)\}$. I CASI POSSIBILI PERCIÒ SONO TRE, CONTRO UNO FAVOREVOLE, E LA PROBABILITÀ DIVENTA $1/3$.

LA PROBABILITÀ CHE SI VERIFICHI L'EVENTO A, SOTTO LA CONDIZIONE CHE SI VERIFICHI L'EVENTO B, SI INDICA CON $P(A|B)$. COME CALCOLARLA? SI CONSIDERI L'ESEMPIO SOPRA UTILIZZATO. OLTRE AL NUMERO DEI CASI POSSIBILI, OVVERO IL NUMERO DEGLI EVENTI DI B, OCCORRE CONSIDERARE IN NUMERO DEI CASI FAVOREVOLI, CIOÈ IL NUMERO DEGLI ELEMENTI DI B CHE REALIZZANO A, OSSIA IL NUMERO DI $A \cap B$ ("A E B"); SE NE DEVE QUINDI FARE IL RAPPORTO. PERCIÒ:

$$p(A|B) = \frac{\text{NUMERO DEGLI EVENTI DI } A\cap B}{\text{NUMERO DEGLI EVENTI DI } B} = \frac{\dfrac{\text{N° EVENTI DI } A\cap B}{\text{N° TOTALE EVENTI}}}{\dfrac{\text{N° EVENTI DI } B}{\text{N° TOTALE EVENTI}}} = \frac{p(A\cap B)}{p(B)}$$

SE NE CONCLUDE QUANTO SEGUE. DATI DUE EVENTI A E B, DI CUI B CON PROBABILITÀ NON NULLA, SI DICE PROBABILITÀ CONDIZIONATA DELL'EVENTO A SOTTO LA CONDIZIONE B IL RAPPORTO TRA LA PROBABILITÀ DI $A \cap B$ E LA PROBABILITÀ DI B:

$$p(A|B) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)}$$



IN PRATICA, B DIVENTA IL NUOVO SPAZIO DEGLI EVENTI!
DELLA SEGUENTE VALE LA FORMULA INVERSA:

$$p(A\cap B) = p(A|B)\, p(B)$$

CHE SI CHIAMA <u>FORMULA DELLA PROBABILITÀ COMPOSTA</u>, ED È MOLTO UTILE PER CALCOLARE LA PROBABILITÀ DELL'INTERSEZIONE DI DUE EVENTI.

$(\longrightarrow)$

($\rightarrow$) SCAMBIANDO TRA LORO A E B, SI HA:

$$p(B|A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)} = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

PERCIÒ $P(A \cap B)$ SI PUÒ ANCHE OTTENERE DA $p(A) \cdot p(B|A)$.

SIA AD ESEMPIO UN SACCHETTO CON I 90 NUMERI DELLA TOMBOLA. SI ESTRAGGONO SUCCESSIVAMENTE DUE NUMERI, SENZA RIMETTERE NEL SACCHETTO IL PRIMO CHE È STATO ESTRATTO. QUAL È LA PROBABILITÀ CHE IL PRIMO NUMERO ESTRATTO SIA DIVISIBILE PER 10, E IL SECONDO SIA PARI?

SIA A L'EVENTO "IL PRIMO NUMERO È DIVISIBILE PER 10" E B L'EVENTO "IL SECONDO NUMERO È PARI". BISOGNA DUNQUE CALCOLARE $P(A \cap B)$.

$P(A) = \frac{9}{90} = \frac{1}{10}$. INVECE $p(B|A)$ È LA PROBABILITÀ DI ESTRARRE UN NUMERO PARI DOPO CHE DAL SACCHETTO È STATO ESTRATTO UN NUMERO DIVISIBILE PER 10, E QUINDI PARI. DUNQUE $p(B|A) = \frac{44}{89}$. PERCIÒ, CON LA FORMULA DELLE PROBABILITÀ COMPOSTE, $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B|A) = \frac{1}{10} \cdot \frac{44}{89} = \frac{22}{445}$.

DUE EVENTI SI DICONO <u>INDIPENDENTI</u> SE IL VERIFICARSI DELL'UNO NON ALTERA LA PROBABILITÀ CHE SI VERIFICHI L'ALTRO. IN ALTRE PAROLE:

$$p(A|B) = p(A)$$

SE DUE EVENTI SONO TRA LORO INDIPENDENTI, LA FORMULA DELLE PROBABILITÀ COMPOSTE DIVENTA:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

SIA AD ESEMPIO UN DADO NON TRUCCATO. LANCIO IL DADO DUE VOLTE. L'EVENTO A È "IL PRIMO NUMERO USCITO È 1", L'EVENTO B È "IL SECONDO NUMERO USCITO È 6". OVVIAMENTE I DUE EVENTI SONO INDIPENDENTI, E QUINDI NE SEGUE CHE $p(A \cap B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$. INFATTI L'EVENTO $(1, 6)$ È SOLO UNO SU 36: LA LEGGE SUDDETTA È VERIFICATA.

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE, SE A E B SONO EVENTI INDIPENDENTI, LO SONO ANCHE $\overline{A}$ E B, A E $\overline{B}$, $\overline{A}$ E $\overline{B}$.

CONCLUDIAMO CON UN ALTRO ESEMPIO. LA PROBABILITÀ CHE GIOVANNI ABBIA UN COLLOQUIO DI LAVORO DOMANI È DEL 55%; SE ESSO VIENE RIMANDATO, ANDRÀ AL MARE CON UNA PROBABILITÀ DEL 40%. QUAL È LA PROBABILITÀ CHE IL COLLOQUIO SIA RIMANDATO E GIOVANNI VADA AL MARE?

SIA A "SI SVOLGE IL COLLOQUIO DI LAVORO" E B "GIOVANNI VA AL MARE". I DATI CI DICONO CHE $p(A) = 0{,}55$ E $p(B|\overline{A}) = 0{,}4$. OVVIAMENTE L'EVENTO $\overline{A}$, CIOÈ CHE IL COLLOQUIO VENGA RIMANDATO, HA PROBABILITÀ $1 - 0{,}55 = 0{,}45$.

LA PROBABILITÀ CHE IL COLLOQUIO NON SI TENGA E GIOVANNI VADA AL MARE È $P(\overline{A} \cap B)$, E PER LA REGOLA DELLE PROBABILITÀ COMPOSTE:

$$p(\overline{A} \cap B) = p(\overline{A}) \cdot p(B|\overline{A}) = 0{,}45 \cdot 0{,}4 = 0{,}18$$