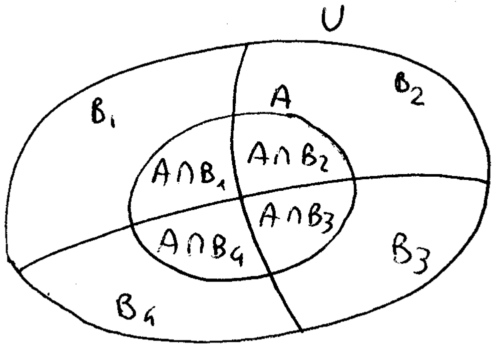
LA PROBABILITÀ TOTALE

SIA DATO LO SPAZIO DEGLI EVENTI DIVISO IN n EVENTI DI PROBABILITÀ NON NULLA E A DUE A DUE DISGIUNTI, LA CUI UNIONE È LO SPAZIO DI PARTENZA.

$$U = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n$$



CONSIDERIAMO POI UN EVENTO $A \subset U$. COME SI VEDE IN FIGURA, GLI EVENTI $A \cap B_1$, $A \cap B_2$, ... $A \cap B_n$ SONO A LORO VOLTA DISGIUNTI E LA LORO UNIONE È A (IN FIGURA $n = 4$):

$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_n)$$

ESSENDO QUESTI EVENTI DISGIUNTI, ALLORA:

$$p(A) = p(A \cap B_1) + p(A \cap B_2) + \dots + p(A \cap B_n)$$

IN BASE ALLA FORMULA DELLE PROBABILITÀ COMPOSTE, ESSA SI PUÒ SCRIVERE:

$$p(A) = p(A|B_1)\,p(B_1) + p(A|B_2)\,p(B_2) + \dots + p(A|B_n)\,p(B_n)$$

OVVERO, IN FORMA SINCOPATA:

$$p(A) = \sum_{k=1}^{n} p(A|B_k)\,p(B_k)$$

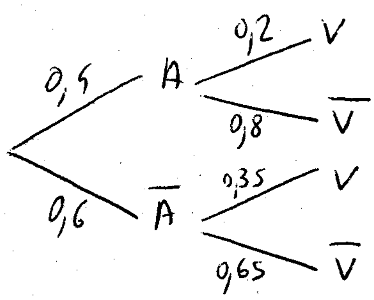
QUESTA SI CHIAMA FORMULA DELLA PROBABILITÀ TOTALE. SE GLI EVENTI B_n SONO SOLO DUE, B E $\overline{B} = U - B$, SI AVRÀ:

$$p(A) = p(A|B)\,p(B) + p(A|\overline{B})\,p(\overline{B})$$

GLI EVENTI B_n VENGONO CHIAMATI ALTERNATIVE.

ESEMPIO – UN TEAM DI FORMULA UNO HA PIÙ CHANCES DI VINCERE SE CORRE SULL'ASFALTO BAGNATO, PENSANO I SUOI INGEGNERI. IN PARTICOLARE GLI ESPERTI DANNO IL TEAM VINCENTE AL 20% IN CASO DI TEMPO ASCIUTTO E AL 35% IN CASO DI PIOGGIA. IL METEO PREVEDE, DURANTE LA GARA, TEMPO ASCIUTTO CON PROBABILITÀ DEL 40%. QUAL È LA PROBABILITÀ CHE IL TEAM VINCA LA GARA?

SIA V L'EVENTO "VITTORIA" PER IL TEAM NEL GRAN PREMIO, E SIA A L'EVENTO "TEMPO ASCIUTTO" (DUNQUE $\overline{A}$ SIGNIFICA "PIOGGIA"). IL DIAGRAMMA AD ALBERO È QUELLO A DESTRA.



PER LA FORMULA DELLA PROBABILITÀ TOTALE AVREMO:

$$p(V) = p(V|A)\,p(A) + p(V|\overline{A})\,p(\overline{A}) =$$

$$= 0{,}2 \cdot 0{,}4 + 0{,}35 \cdot 0{,}6 = 0{,}29 = 29\%$$

INFATTI $p(V|A)$ È LA PROBABILITÀ DI VITTORIA IN CASO DI TEMPO ASCIUTTO, CIOÈ IL 20%, E $p(V|\overline{A})$ QUELLA DI VITTORIA CON PIOGGIA, CIOÈ IL 35%.

LA FORMULA DI BAYES

SIANO GLI n EVENTI A DUE A DUE DISGIUNTI (E QUINDI MUTUAMENTE INCOMPATIBILI) $B_1, B_2 \dots B_n$. LE LORO PROBABILITÀ SIANO $p(B_1), p(B_2), \dots, p(B_n)$. SE L'EVENTO A SI È <u>SICURAMENTE</u> REALIZZATO CIÒ MODIFICA LE PROBABILITÀ DEGLI EVENTI $B_1, B_2, \dots, B_n$. DALLA FORMULA DELLA PROBABILITÀ TOTALE SI RICAVA:

$$p(A \quad B_1) = p(A)\, p(B_1|A) \qquad \text{MA } p(A \cap B_1) = p(B_1 \cap A)$$

ED ESSENDO:

$$p(B_1 \cap A) = p(B_1)\, p(A|B_1)$$

DALL'UGUAGLIANZA SI RICAVA:

$$p(A)\, p(B_1|A) = p(B_1)\, p(A|B_1) \qquad \text{E QUINDI} \qquad p(B_1|A) = \frac{p(B_1)\, p(A|B_1)}{p(A)}$$

MA $p(A)$ È FORMATA DALLA FORMULA DELLA PROBABILITÀ TOTALE. SOSTITUENDO SI TROVA LA FORMULA DI BAYES, DAL MATEMATICO INGLESE THOMAS BAYES (1702-1761):

$$p(B_1|A) = \frac{P(B_1)\ P(A|B_1)}{\sum_{k=1}^{n} p(B_k)\, p(A|B_k)}$$

E PIÙ IN GENERALE:

$$p(B_H|A) = \frac{p(B_H)\, p(A)\, B_H}{\sum_{k=1}^{n} p(B_k)\, p(A|B_k)}$$

LA FORMULA DI BAYES (DETTA ANCHE TEOREMA DELLA PROBABILITÀ DELLE CAUSE) CI DICE QUAL È LA PROBABILITÀ CHE UN CERTO EVENTO SI SIA VERIFICATA IN UNA PARTICOLARE MODALITÀ O CAUSA TRA LE TANTE POSSIBILI.

ESEMPIO. SIA UNA FABBRICA NELLA QUALE TRE MACCHINE PRODUCONO AUTOMATICAMENTE DELLE RUOTE PER CARRELLI. LA PRIMA MACCHINA PRODUCE 500 RUOTE AL GIORNO, DI CUI IL 2% SONO DIFETTOSE. LA SECONDA PRODUCE 300 RUOTE AL GIORNO, DI CUI L'1% SONO DIFETTOSE. LA TERZA PRODUCE 200 RUOTE AL GIORNO, DI CUI IL 3% SONO DIFETTOSE. FACENDO UN CONTROLLO DI QUALITÀ SI SCOPRE UNA RUOTA DIFETTOSA. QUAL È LA PROBABILITÀ CHE ESSA PROVENGA DALLA PRIMA MACCHINA?

B_1 È L'EVENTO "PRODOTTO DALLA PRIMA MACCHINA", B_2 "DALLA SECONDA" E B_3 "DALLA TERZA"; A È L'EVENTO "RUOTA DIFETTOSA". SU 1000 RUOTE, 500 VENGONO DALLA PRIMA, 300 DALLA 2^a E 200 DALLA 3^a, QUINDI:

$$p(A|B_1) = 0{,}5 \quad ; \quad p(A|B_2) = 0{,}3 \quad ; \quad p(A|B_3) = 0{,}2$$

APPLICHIAMO ORA LA FORMULA DI BAYES:

$$p(B_1|A) = \frac{0{,}02 \cdot 0{,}5}{0{,}02 \cdot 0{,}5 + 0{,}01 \cdot 0{,}3 + 0{,}03 \cdot 0{,}2} = \frac{0{,}01}{0{,}019} = 0{,}526 = 52{,}6\%$$