PROGRESSIONI ARITMETICHE E GEOMETRICHE

SI DICE <u>PROGRESSIONE ARITMETICA</u> UNA SUCCESSIONE TALE CHE LA DIFFERENZA TRA OGNI TERMINE E IL PRECEDENTE È COSTANTE E SI DICE <u>RAGIONE</u> d.

ESEMPIO: $\{10, 15, 20, 25, 30, 35 \dots\}$ $(*)$

IL PRIMO TERMINE È 10 E LA RAGIONE È 5. IN TERMINI DI DEFINIZIONE RICORSIVA SI PUÒ SCRIVERE IN QUESTI TERMINI:

$$\div \quad \begin{cases} a_1 = 10 \\ a_n = a_{n+1} + 5 \end{cases}$$

E IN TERMINI DI ELEMENTO GENERICO: $a_n = a_1 + (n-1)\,d$

INFATTI LA DIFFERENZA TRA a_n E a_1 È PARI AD $(n-1)$ VOLTE LA RAGIONE d. LA SOMMA DEI PRIMI n TERMINI DI UNA PROGRESSIONE ARITMETICA È PARI A:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)$$

AD ESEMPIO, LA SOMMA DEI PRIMI 6 TERMINI DELLA PROGRESSIONE $(*)$ È:

$$S_6 = 6\left(\frac{10+35}{2}\right) = 3 \cdot 45 = 135$$

DETERMINIAMO IL LIMITE DI UNA PROGRESSIONE ARITMETICA PER $n \to \infty$.

SE $d = 0$, LA PROGRESSIONE È COSTANTE, E ALLORA $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a_1$

SE $d \neq 0$, ALLORA:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\left[a_1 + (n-1)\,d\right] = \begin{cases} +\infty & \text{SE } d > 0 \\ -\infty & \text{SE } d < 0 \end{cases}$$

NE CONSEGUE CHE UNA PROGRESSIONE [illegible]ETICA DI RAGIONE $\neq 0$ È SEMPRE <u>DIVERGENTE</u>.

— ~ —

SI DICE <u>PROGRESSIONE GEOMETRICA</u> UNA SUCCESSIONE TALE CHE IL RAPPORTO TRA OGNI TERMINE E IL PRECEDENTE È COSTANTE E SI DICE RAGIONE q. LA RAGIONE DEVE ESSERE PER FORZA $\neq 0$.

ESEMPIO: $\{7, 21, 63, 189, 567, 1701 \dots\}$ $(**)$

IL PRIMO TERMINE È 7 E LA RAGIONE È 3. IN TERMINI DI DEFINIZIONE RICORSIVA SI PUÒ SCRIVERE:

$$\div\div \quad \begin{cases} a_1 = 7 \\ a_n = 3\,a_{n-1} \end{cases}$$

E IN TERMINI DI ELEMENTO GENERICO: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

INFATTI, PER OTTENERE a_n, BISOGNA MOLTIPLICARE $(n-1)$ VOLTE IL TERMINE a_1 PER q. LA SOMMA DEI PRIMI n TERMINI DI UNA PROGRESSIONE GEOMETRICA È PARI A:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

AD ESEMPIO, LA SOMMA DEI PRIMI n TERMINI DELLA PROGRESSIONE $(**)$ È: $(\longrightarrow)$

(→)

$$S_6 = 7 \cdot \frac{3^6 - 1}{3 - 1} = 2548$$

SE $q > 0$, I TERMINI DELLA PROGRESSIONE SONO TUTTI POSITIVI O TUTTI NEGATIVI.
SE $q < 0$, I TERMINI SONO DI SEGNO ALTERNO.

DETERMINIAMO ORA IL LIMITE DI UNA PROGRESSIONE GEOMETRICA PER $n \to \infty$.

a) SE $\underline{q \leq -1}$, a_n CAMBIA DI SEGNO DI TERMINE IN TERMINE AL CRESCERE DI n. IL SUO VALORE ASSOLUTO TENDE A $+\infty$, ED ALLORA I TERMINI PARI SI AVVICINANO A $+\infty$, QUELLI DISPARI A $-\infty$. NE CONSEGUE CHE LA PROGRESSIONE NON AMMETTE LIMITE, E QUINDI È <u>INDETERMINATA</u>.

b) SE $\underline{|q| < 1}$, CIOÈ SE $-1 < q < 1$, ALLORA q^n TENDE A ZERO QUANDO n CRESCE ALL'INFINITO, E QUINDI $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$. LA SUCCESSIONE È QUINDI <u>CONVERGENTE A ZERO</u>.

c) SE $q > 1$, ALLORA:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} a_1 q^n = \begin{cases} +\infty & \text{SE } a_1 > 0 \\ -\infty & \text{SE } a_1 < 0 \end{cases}$$

CIOÈ LA PROGRESSIONE È DIVERGENTE.

SE INFINE $q = 1$, LA PROGRESSIONE È <u>COSTANTE</u> E TENDE PERCIÒ AD a_1.

QUAL È IL LIMITE DELLA SOMMA DEGLI ELEMENTI DI UNA PROGRESSIONE GEOMETRICA? OCCORRERÀ CALCOLARE:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

SE $q \geq 1$, QUESTO LIMITE TENDE A $+\infty$ E LA SOMMA <u>DIVERGE</u>.
SE $q < 1$, q^n TENDE A ZERO E QUINDI $\lim_{n \to \infty} S_n = a_1 \frac{1}{1 - q}$ (CONVERGE).

DETERMINIAMO AD ESEMPIO LA FRAZIONE GENERATRICE DI UN NUMERO DECIMALE PERIODICO SEMPLICE. CONSIDERIAMO $0,\overline{2}$. SI HA:

$$0,\overline{2} = 0,2222\ldots = 0,2 + 0,02 + 0,002 + \ldots = \frac{2}{10} + \frac{2}{100} + \frac{2}{1000} + \ldots$$

ORA, $\left\{ \frac{2}{10}, \frac{2}{100}, \frac{2}{1000}, \ldots \right\}$ È UNA PROGRESSIONE GEOMETRICA CHE HA COME PRIMO TERMINE $\frac{2}{10}$ E COME RAGIONE $\frac{1}{10}$, CHE È MINORE DI UNO. SE NE DEDUCE CHE LA SOMMA DI QUESTI TERMINI È PARI A:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} \cdot \frac{2}{10} = \frac{1}{\frac{9}{10}} \cdot \frac{2}{10} = \frac{10}{9} \cdot \frac{2}{10} = \frac{2}{9}$$

È QUINDI VERO CHE LA FRAZIONE GENERATRICE DI UN N° DECIMALE PERIODICO SEMPLICE SI OTTIENE PRENDENDO TUTTO IL NUMERO SENZA LA VIRGOLA MENO LA PARTE INTERA, DIVISO TANTI 9 QUANTE SONO LE CIFRE DEL PERIODO.