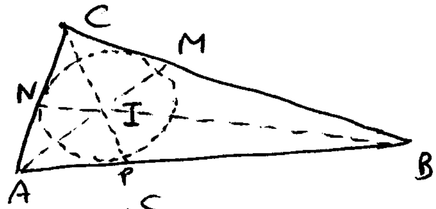
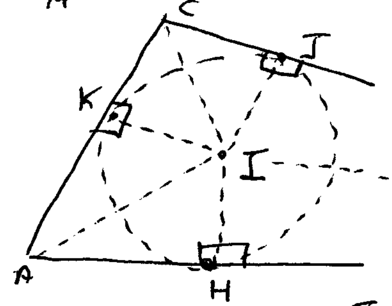
PUNTI NOTEVOLI DEL TRIANGOLO

TH. 1 - TUTTE LE BISETTRICI DI UN TRIANGOLO PASSANO PER UN SOLO PUNTO DETTO INCENTRO, CHE COINCIDE CON IL CENTRO DELLA CIRCONFERENZA INSCRITTA NEL TRIANGOLO



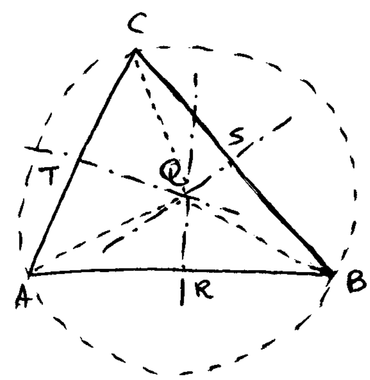
DIM.
LA BISETTRICE È IL LUOGO (INSIEME) DEI PUNTI EQUIDISTANTI DAI LATI DELL'ANGOLO. SE $\overline{AM}$ È BISETTRICE DI $B\hat{A}C$ E $\overline{BN}$ È BISETTRICE DI $A\hat{B}C$, ALLORA SIGNIFICA CHE $\overline{HI} \cong \overline{IK}$, MENTRE $\overline{HI} = \overline{IJ}$ (ESSENDO $\overline{HI} \perp \overline{AB}$, $\overline{IJ} \perp \overline{BC}$ E $\overline{IK} \perp \overline{AC}$. PER LA PROPRIETÀ TRANSITIVA, ALLORA, ANCHE $\overline{IK} \cong \overline{IJ}$; DUNQUE IL PUNTO $I = \overline{AM} \cap \overline{BN}$ È EQUIDISTANTE PURE DAI LATI AC E BC, E DUNQUE APPARTIENE ALLA BISETTRICE DI $A\hat{C}B$. CONCLUSIONE: TUTTE E TRE LE BISETTRICI PASSANO PER IL PUNTO I, E QUESTO PUNTO È EQUIDISTANTE DAI TRE LATI. DI QUI PASSA LA CIRCONFERENZA TANGENTE AI LATI DEL TRIANGOLO, CIOÈ LA CIRCONFERENZA Γ IN ESSO INSCRITTA.



Hp.
$B\hat{A}M \cong M\hat{A}C$
$A\hat{B}N \cong N\hat{B}C$
$I = \overline{AM} \cap \overline{BN}$

Ts.
$A\hat{C}P \cong P\hat{C}B$
$\overline{HI} \cong \overline{IK} \cong \overline{IJ}$

TH. 2 - TUTTI GLI ASSI DEI LATI DI UN TRIANGOLO PASSANO PER UN UNICO PUNTO DETTO CIRCOCENTRO, CHE COINCIDE CON IL CENTRO DELLA CIRCONFERENZA CIRCOSCRITTA AL TRIANGOLO.



Hp.
$\overline{RQ}$ ASSE DI $\overline{AB}$
$\overline{QS}$ ASSE DI $\overline{BC}$, $Q = \overline{QR} \cap \overline{QS}$
Ts.
$\overline{TQ}$ ASSE DI $\overline{AC}$

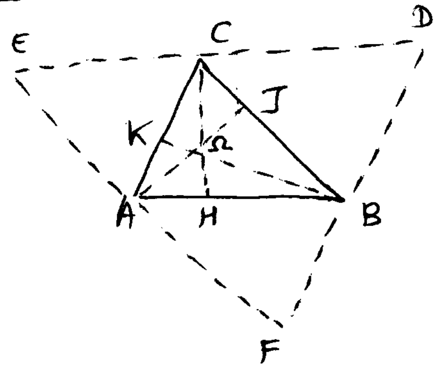
DIM.
L'ASSE È IL LUOGO (INSIEME) DEI PUNTI EQUIDISTANTI DAGLI ESTREMI DEI LATI DEL TRIANGOLO. SE $\overline{QR}$ È L'ASSE DA $\overline{AB}$, ALLORA $\overline{AQ} \cong \overline{QB}$; SE $\overline{QS}$ È L'ASSE DI $\overline{BC}$, ALLORA $\overline{QB} \cong \overline{QC}$. ALLORA, PER LA PROPRIETÀ TRANSITIVA, $\overline{AQ} \cong \overline{QC}$. NE CONSEGUE CHE ANCHE $\overline{AQ} \cong \overline{QC}$. CIÒ SIGNIFICA CHE Q È EQUIDISTANTE DAI VERTICI DI $\overline{AC}$, E PERCIÒ APPARTIENE AL SUO ASSE. ANCHE IL TERZO ASSE PASSA PERCIÒ PER Q. INOLTRE, PER LA PROPRIETÀ TRANSITIVA:

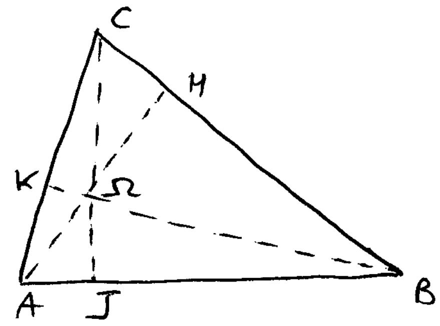
$$\overline{AQ} \cong \overline{QB} \cong QC$$

ESSENDO EQUIDISTANTE DAI TRE VERTICI DEL TRIANGOLO, SIGNIFICA CHE Q È IL CENTRO DELLA CIRCONFERENZA CIRCOSCRITTA NEL TRIANGOLO.

IL RAGGIO DELLA CIRCONFERENZA INSCRITTA NEL TRIANGOLO VALE $r = \frac{\mathcal{A}}{p}$ DOVE $\mathcal{A}$ È L'AREA E p IL SEMIPERIMETRO; QUELLO DELLA CIRCONFERENZA CIRCOSCRITTA VALE $R = \frac{abc}{4\mathcal{A}}$, ESSENDO a, b, c I TRE LATI DEL TRIANGOLO.

TH. 3 Tutte e tre le altezze di un triangolo passano per un solo punto chiamato ortocentro.





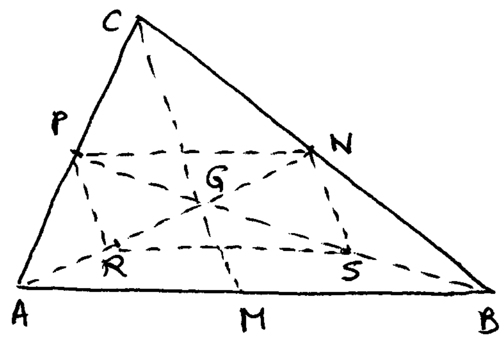
Hp.
$\overline{AH} \perp \overline{BC}$
$\overline{BK} \perp \overline{AC}$
$\Omega = \overline{AH} \cap \overline{BK}$

Ts.
$\overline{CJ} \perp \overline{AB}$

Costruz.
$\overline{DE} \parallel \overline{AB}$
$\overline{EF} \parallel \overline{BC}$
$\overline{FD} \parallel \overline{AC}$

DIM. Conduco da A la parallela a $\overline{BC}$, da B la parallela ad $\overline{AC}$ e da C la parallela ad AB, costruendo il triangolo $\overset{\triangle}{DEF}$. Considero il quadrilatero ABDC; esso è un parallelogramma, avendo i lati paralleli a due a due. Ma anche ABCE è un parallelogramma per lo stesso motivo. I lati opposti di un parallelogramma sono congruenti, per cui $\overline{AB} \cong CD$ ed $\overline{AB} \cong CE$. Per la proprietà transitiva, anche $\overline{DC} \cong \overline{CE}$. Inoltre, se CH è l'altezza di $\overset{\triangle}{ABC}$ relativa ad $\overline{AB}$, essa è perpendicolare ad $\overline{AB}$; ma allora è perpendicolare anche a $\overline{DE}$ che è parallela ad $\overline{AB}$ per costruzione. Dunque $\overline{CH}$ è la perpendicolare nel punto medio di $\overline{DE}$, cioè è il suo asse. Analogamente si dimostra che l'altezza $\overline{BK}$ è asse di $\overline{DF}$ e che l'altezza $\overline{AJ}$ è asse di $\overline{BC}$. Perciò i tre assi di $\hat{DEF}$ passano per un solo punto. Anche le tre altezze di $\overset{\triangle}{ABC}$ passano dunque per un punto solo: l'ortocentro.

TH. 4 Le tre mediane di un triangolo passano per uno stesso punto detto baricentro, che le divide in due parti, della quale quella che contiene il vertice è doppia dell'altra.



Hp.
$\overline{BN} \cong \overline{NC}$
$\overline{AP} \cong \overline{PC}$

Ts.
$\overline{CG} = 2\,\overline{GM}$
$\overline{AM} \cong \overline{MB}$

Sia G il punto di intersezione tra le mediane $\overline{AN}$ e $\overline{BP}$. $\overline{PN}$ congiunge i punti medi di due lati del triangolo, dunque è parallelo ad $\overline{AB}$ e pari alla sua metà.

Siano R ed S i punti medi di $\overline{AG}$ e di $\overline{BG}$. Allora anche $\overline{RS}$ è parallelo al terzo lato e pari ad $\overline{AB}/2$. Ne segue che $\overline{RS}$ e $\overline{PN}$ sono paralleli e congruenti; dunque PRSN è un parallelogramma. Le sue diagonali si tagliano a metà, dunque $\overline{RG} \cong \overline{GN}$ e $\overline{PG} \cong \overline{GS}$. Ma $\overline{AR} \cong \overline{RG}$ e $\overline{GS} \cong \overline{SB}$ per costruzione. Ne segue che $\overline{AR} \cong \overline{RG} = \overline{GN}$ e che $\overline{PG} \cong \overline{GS} \cong \overline{SB}$. In altre parole, $\overline{AG} = 2\,\overline{GN}$ e $\overline{BG} = 2\,\overline{GP}$. Analogamente si dimostra che $\overline{CG} = 2\,\overline{GM}$. E siccome anche la mediana $\overline{CM}$ deve dividere le altre due in due parti della quale quella che contiene il vertice è doppia dell'altra, evidentemente anche $\overline{CM}$ passa per G.