ESEMPIO DI STUDIO DI FUNZIONE (1)

SI CONSIDERI LA FUNZIONE

$$y = \frac{x^2-9}{x+2}$$

① CAMPO DI ESISTENZA. DEVE ESSERE $x+2 \neq 0$, CIOÈ $x \neq -2$
PER I NOSTRI SCOPI CONVIENE SCRIVERLO $(-\infty; -2^-) \cup (-2^+; +\infty)$

② PARI O DISPARI. DEVO SOSTITUIRE $-x$ A x:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2-9}{-x+2} = \frac{x^2-9}{-x+2}$$

ESSENDO DIVERSO DA $f(x)$ E DA $f(-x)$, NON È NÉ PARI NÉ DISPARI. NON GODE QUINDI DI SIMMETRIE.

③ INTERSEZIONI CON GLI ASSI

ASSE y: $\begin{cases} x=0 \\ y=\frac{x^2-9}{x+2} \end{cases}$ $\begin{cases} x=0 \\ y=-\frac{9}{2} \end{cases}$ $A\left(0; -\frac{9}{2}\right)$

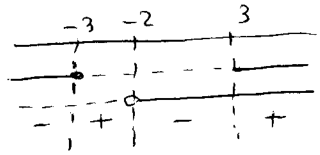
ASSE x: $\begin{cases} y=0 \\ y=\frac{x^2-9}{x+2} \end{cases}$ $\begin{cases} y=0 \\ x^2-9=0 \end{cases}$ $\begin{cases} y=0 \\ x=\pm 3 \end{cases}$ $B(3;0)$ $C(-3;0)$

④ SEGNO DELLA FUNZIONE

$$y = \frac{x^2-9}{x+2} \geq 0$$

$N \geq 0$ $x^2-9 \geq 0$ $x \leq -3 \vee x \geq 3$

$D > 0$ $x+2>0$ $x>-2$



⑤ LIMITI. BISOGNA ESEGUIRE I LIMITI DELLA FUNZIONE AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA PER TROVARE EVENTUALI ASINTOTI.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-9}{x+2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(1-\cancel{\frac{9}{x^2}}\right)}{x\left(1+\cancel{\frac{2}{x}}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-9}{x+2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = (\text{COME SOPRA}) = +\infty$$

NON C'È ASINTOTO ORIZZONTALE.

$$\lim_{x\to-2^-} \frac{x^2-9}{x+2} = \frac{4-9}{-2^-+2} = \frac{-5}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-2^+} \frac{x^2-9}{x+2} = \frac{4-9}{-2^++2} = \frac{-5}{0^+} = -\infty$$

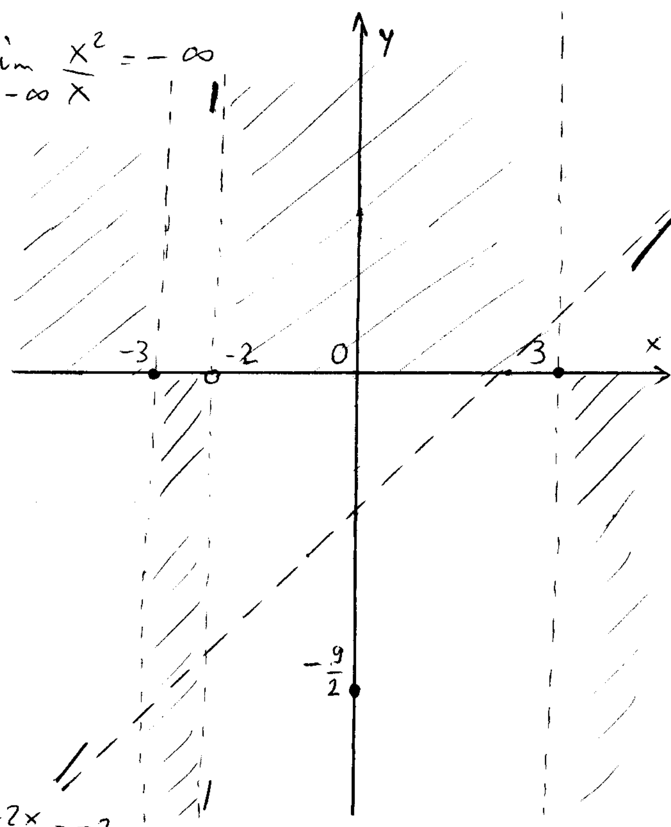
C'È L'ASINTOTO VERTICALE $x=-2$.

CERCHIAMO L'EVENTUALE ASINTOTO OBLIQUO.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-9}{x^2+2x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(1-\cancel{\frac{9}{x^2}}\right)}{x^2\left(1+\cancel{\frac{2}{x}}\right)} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} [f(x)-mx] = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-9}{x+2} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{-9-2x}{x+2} = -2$$



QUINDI ESISTE L'ASINTOTO OBLIQUO $y=x-2$, COME SI VEDE NELLA FIGURA.

⑥ DERIVATA PRIMA. SI TRATTA DELLA DERIVATA DI UN RAPPORTO.

$$y' = \frac{2x(x+2) - (x^2-9)}{(x+2)^2} = \frac{2x^2+4x-x^2+9}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x+9}{(x+2)^2}$$

$y' = 0$ SE $x^2+4x+9=0$, MA $\frac{\Delta}{4} = 4-9<0$

PERCIÒ LA FUNZIONE NON HA ESTREMANTI, E QUINDI NÉ PUNTI DI MASSIMO NÉ PUNTI DI MINIMO.
STUDIAMO ORA IL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.
IL NUMERATORE È SEMPRE POSITIVO PERCHÉ, AVENDO $\frac{\Delta}{4} < 0$, HA SEMPRE IL SEGNO DEL PRIMO COEFFICIENTE.
IL DENOMINATORE È A SUA VOLTA SEMPRE POSITIVO, PERCHÉ È UN QUADRATO.
NE CONSEGUE CHE LA FUNZIONE È <u>MONOTONA CRESCENTE</u>.

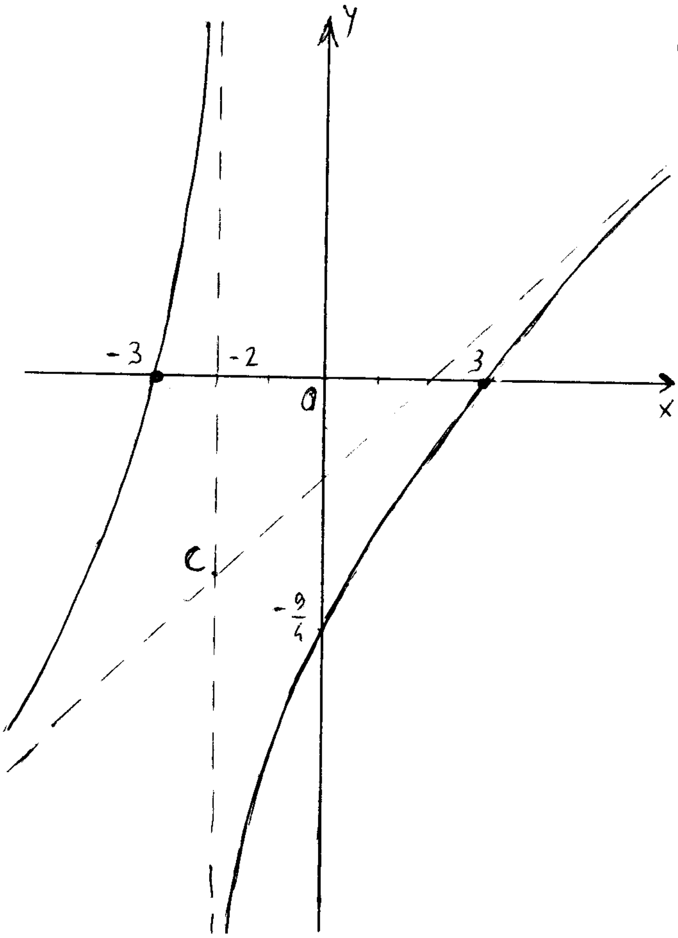
⑦ DERIVATA SECONDA. ANCHE STAVOLTA È LA DERIVATA DI UN RAPPORTO.

$$y'' = \frac{(2x+4)(x+2)^{\cancel{2}} - (x^2+4x+9)\,2\cancel{(x+2)}}{(x+2)^{\cancel{4}3}} = \frac{\cancel{2x^2}+\cancel{4x}+\cancel{4x}+8-\cancel{2x^2}-\cancel{8x}-18}{(x+2)^3} =$$

$$y'' = \frac{-10}{(x+2)^3}$$

$y''=0$ NON SI PUÒ VERIFICARE PERCHÉ IL NUMERATORE È COSTANTE.

ANCHE IN QUESTO CASO NON CI SONO FLESSI.
STUDIAMO ORA IL SEGNO DELLA DERIVATA SECONDA.
IL NUMERATORE È SEMPRE NEGATIVO E VALE -10. IL DENOMINATORE INVECE È POSITIVO SE $x+2>0$, CIOÈ SE $x>-2$.
NE CONSEGUE CHE PER $x<-2$ LA DERIVATA SECONDA È POSITIVA, E LA CONCAVITÀ DELLA FUNZIONE VOLGE VERSO L'ALTO. INVECE PER $x>-2$ LA CONCAVITÀ VOLGE VERSO IL BASSO.
L'ASPETTO DELLA FUNZIONE È DUNQUE QUELLO A SINISTRA.



OSSERVIAMO CHE SI TRATTA DI UNA CURVA BEN NOTA. INFATTI ELIMINANDO IL DENOMINATORE SI HA:

$$y(x+2) = x^2-9$$

CIOÈ: $\quad x^2 - xy - 2y - 9 = 0$

L'EQUAZIONE È DI SECONDO GRADO, DUNQUE RAPPRESENTA UNA <u>CONICA</u>. SICCOME ESSA HA DUE ASINTOTI, SI TRATTA CERTAMENTE DI UNA <u>IPERBOLE</u>. IL CENTRO DI SIMMETRIA SI TROVA ALL'INTERSEZIONE DEI DUE ASINTOTI, CIOÈ NEL PUNTO $(-2; -4)$. OVVIAMENTE L'IPERBOLE NON È RIFERITA NÉ AI SUOI ASSI NÉ AI SUOI ASINTOTI.