ESEMPIO DI STUDIO DI FUNZIONE (2)

CONSIDERIAMO LA FUNZIONE $y = \dfrac{x^3}{x^2-4}$ E STUDIAMONE L'ANDAMENTO.

① CAMPO DI ESISTENZA. DEVE ESSERE $x^2-4 \neq 0$, CIOÈ $x \neq \pm 2$
QUINDI IL C.E. È $(-\infty; -2^-) \cup (-2^+; 2^-) \cup (2^+; +\infty)$

② PARI O DISPARI. SOSTITUISCO $(-x)$ AL POSTO DI x.

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2-4} = \frac{-x^3}{x^2-4} = -f(x)$$

DUNQUE LA FUNZIONE È DISPARI.
È SIMMETRICA RISPETTO ALL'ORIGINE.

③ INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

ASSE y $\begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{x^3}{x^2-4} \end{cases} \rightarrow O(0;0)$ ASSE x $\begin{cases} y = 0 \\ y = \dfrac{x^3}{x^2-4} \end{cases} \rightarrow O(0;0)$

④ SEGNO DELLA FUNZIONE

DEVE ESSERE $\dfrac{x^3}{x^2-4} > 0$ NUMERATORE: $x > 0$
DENOMINATORE: $x^2-4 > 0$
$x < -2 \cup x > 2$

$$\begin{array}{ccccccc} & -2 & & 0 & & 2 & \\ - & & + & & - & & + \end{array}$$

⑤ LIMITI. I LIMITI VANNO CALCOLATI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.
ESSENDO LA FUNZIONE DISPARI, BASTA DETERMINARE QUELLI PER $x > 0$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^2-4} = \lim_{x^2 \to +\infty} \frac{x^3}{x^2\left(1-\cancel{\frac{4}{x^2}}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x} = +\infty$$

NON C'È ALCUN ASINTOTO ORIZZONTALE.

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x^3}{(x+2)(x-2)} = \frac{8}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^3}{(x+2)(x-2)} = \frac{8}{0^-} = -\infty$$

C'È L'ASINTOTO VERTICALE $x = 2$.
PER SIMMETRIA C'È ANCHE $x = -2$.

DETERMINIAMO ORA SE ESISTE L'ASINTOTO OBLIQUO. SI HA:

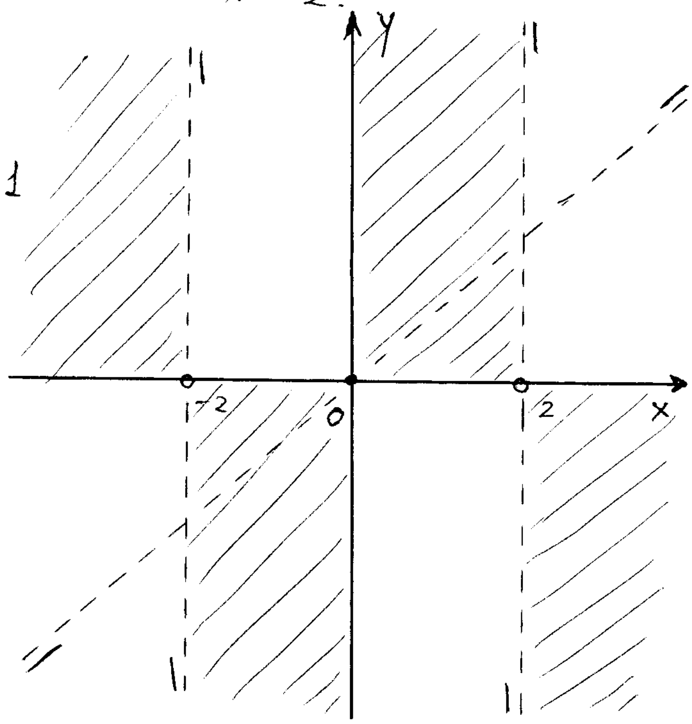
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^3-4x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^3\left(1-\cancel{\frac{4}{x^2}}\right)} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - mx = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^2-4} - x =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^3} - \cancel{x^3} + 4x}{x^2-4} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x}{x^2-4} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{4x}{x^2\left(1-\cancel{\frac{4}{x^2}}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{x} = 0^+$$

DUNQUE ESISTE UN ASINTOTO OBLIQUO DI EQUAZIONE $y = x$.
L'ANDAMENTO QUALITATIVO DELLA FUNZIONE È QUELLO ILLUSTRATO QUI A FIANCO.



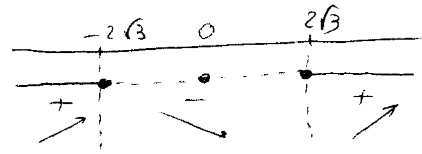
⑥ DERIVATA PRIMA. SI TRATTA DELLA DERIVATA DI UN RAPPORTO.

$$y' = \frac{3x^2(x^2-4) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{3x^4 - 12x^2 - 2x^4}{(x^2-4)^2} = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2-4)^2}$$

$y' = 0$ SE $x^2(x^2-12) = 0$, CIOÈ SE $x = 0$ ED $x = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$

PERCIÒ LA FUNZIONE HA TRE ESTREMANTI O PUNTI DI STAZIONARIETÀ; PER STABILIRE SE SONO MASSIMI, MINIMI O FLESSI STUDIAMO IL SEGNO DI y'.

$y' > 0$ SE: $x^2 - 12 > 0$ CIOÈ SE $x < -2\sqrt{3} \cup x > +2\sqrt{3}$
PERCHÈ x^2 E $(x^2-4)^2$ SONO SEMPRE POSITIVI.



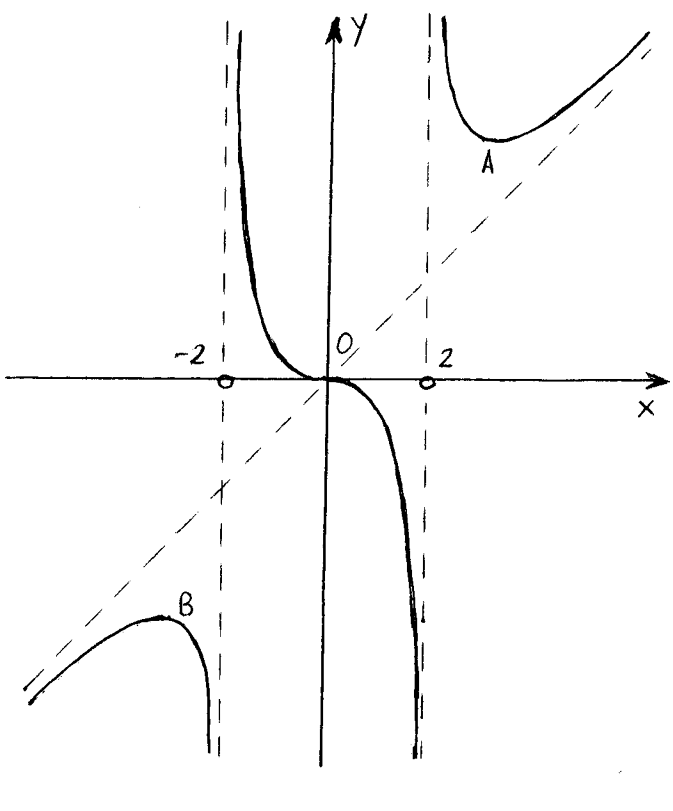
NE SEGUE CHE LA FUNZIONE È CRESCENTE PRIMA DI $-2\sqrt{3}$ E DOPO $2\sqrt{3}$, E FRA I DUE VALORI È DECRESCENTE. IL DIAGRAMMINO MOSTRA COSÌ CHE $A(2\sqrt{3}; 3\sqrt{3})$ È UN <u>MINIMO</u> RELATIVO, $B(-2\sqrt{3}; -3\sqrt{3})$ È UN <u>MASSIMO</u> RELATIVO; $O(0;0)$ È PROBABILMENTE UN FLESSO A TANGENTE ORIZZONTALE. VERIFICHIAMOLO.

⑦ DERIVATA SECONDA.

$$y'' = \frac{(4x^3-24x)(x^2-4)^{\cancel{2}} - (x^4-12x^2)\cdot 2\cancel{(x^2-4)}\cdot 2x}{(x^2-4)^{\cancel{4}\,3}} =$$

$$= \frac{\cancel{4x^5} - \cancel{16x^3} - \cancel{24x^3} + 96x - \cancel{4x^5} + \cancel{48x^3}}{(x^2-4)^3} = \frac{8x^3 + 96x}{(x^2-4)^3}$$

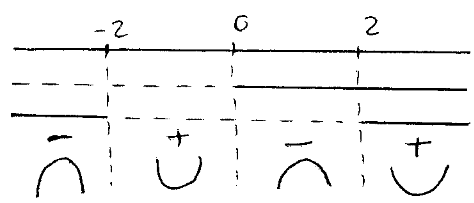
$y'' = 0$ SE $8x^3 + 96x = 0$, CIOÈ SE $8x(x^2+12) = 0$. L'UNICA SOLUZIONE È DUNQUE $x = 0$, CHE È CANDIDATO AD ESSERE UN PUNTO DI FLESSO. STUDIAMO ORA IL SEGNO DI y''.



$N > 0$ PER $8x(x^2+12) > 0$, CIOÈ $x > 0$

$D > 0$ PER $x < -2 \cup x > 2$

DUNQUE:



NE SEGUE CHE LA CONCAVITÀ VOLGE VERSO L'ALTO TRA −2 E 0 E DOPO +2. ESCLUSI I PUNTI ±2 CHE CORRISPONDONO AGLI ASINTOTI VERTICALI, EVIDENTEMENTE $O(0;0)$ È UN <u>FLESSO DISCENDENTE</u>. IN $x = 0$ LA DERIVATA PRIMA VALE ZERO, QUINDI SI TRATTA DI UN FLESSO A TANGENTE ORIZZONTALE, COME SI ERA PREVISTO NEL PUNTO 6.
IL GRAFICO DELLA FUNZIONE È QUELLO RAPPRESENTATO NEL DIAGRAMMA A SINISTRA.