ESEMPIO DI STUDIO DI FUNZIONE (3)

VOGLIAMO STUDIARE L'ANDAMENTO DELLA FUNZIONE $y = \sqrt{x^2 - 4x}$

① CAMPO DI ESISTENZA. DEVE ESSERE $x^2 - 4x \geq 0 \longrightarrow x(x-4) \geq 0$

CIOÈ $x \leq 0 \cup x \geq 4$

$(-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$

② PARI O DISPARI. $f(-x) = \sqrt{x^2 + 4x}$ DUNQUE LA FUNZIONE NON È NÉ PARI NÉ DISPARI.

③ INTERSEZIONI CON GLI ASSI. SE $x = 0$, $y = 0$

SE $y = 0$, $x^2 - 4x = 0$, CIOÈ $x_1 = 0$, $x_2 = 4$

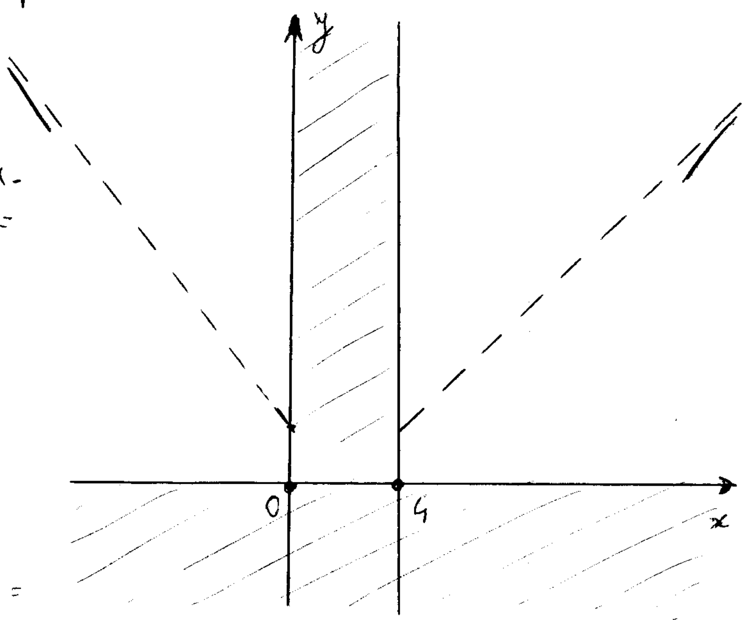
LA FUNZIONE PASSA PER $O(0; 0)$ E $A(4; 0)$

④ SEGNO DELLA FUNZIONE. LA FUNZIONE È SEMPRE POSITIVA, TRATTANDOSI DI UNA RADICE ARITMETICA.

⑤ LIMITI ED ASINTOTI. GLI UNICI ESTREMI DEL C.E. DA CONSIDERARE SONO $+\infty$ E $-\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 4x} = [\infty - \infty] = \lim_{x \to +\infty} x\sqrt{1 - \frac{4}{\cancel{x}}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - 4x} = [\infty + \infty] = +\infty$$



NON C'È DUNQUE ASINTOTO ORIZZONTALE. NON CI SONO NEANCHE ASINTOTI VERTICALI. L'UNICA POSSIBILITÀ È CHE CI SIA UN ASINTOTO OBLIQUO. VERIFICHIAMOLO.

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4x}}{x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{4x}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{1 - \frac{4}{\cancel{x}}} = 1$$

$$q = \lim_{x \to +\infty} f(x) - mx = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 4x} - x =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2} - 4x - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2 - 4x} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-4}{\sqrt{1 - \frac{4}{\cancel{x}}} + 1} = -\frac{4}{2} = -2$$

DUNQUE PER $x \to +\infty$ SI HA L'ASINTOTO OBLIQUO $\boxed{y = +x - 2}$. MA CE N'È UNO DIVERSO PER $x \to -\infty$:

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4x}}{-|x|} = \lim_{x \to -\infty} -\sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{4x}{x^2}} = \lim_{x \to -\infty} -\sqrt{1 - \frac{4}{\cancel{x}}} = -1$$

$$q = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - 4x} + x = \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x^2} - 4x - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2 - 4x} - x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-4}{-\sqrt{1 - \frac{4}{\cancel{x}}} - 1} = \frac{-4}{-2} = +2$$

QUINDI PER $x \to -\infty$ SI HA L'ASINTOTO OBLIQUO $\boxed{y = -x + 2}$.

⑥ DERIVATA PRIMA. SI HA:

$$y' = \frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x}} = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x}}$$

TROVANDOCI IN PRESENZA DI RADICI, OCCORRE RICAVARE ANCHE IL DOMINIO DELLA DERIVATA PRIMA, CHE RISULTA: $x^2-4x>0$ CIOÈ $(-\infty; 0^-)\cup(4^+; +\infty)$

SI OSSERVA CHE IL DOMINIO DELLA DERIVATA PRIMA È PIÙ STRETTO DEL DOMINIO DELLA FUNZIONE. DI CONSEGUENZA VI SARANNO DEI PUNTI SINGOLARI.

$y'=0$ PER $x=2$, CHE PERÒ È ESTERNO AL C.E.

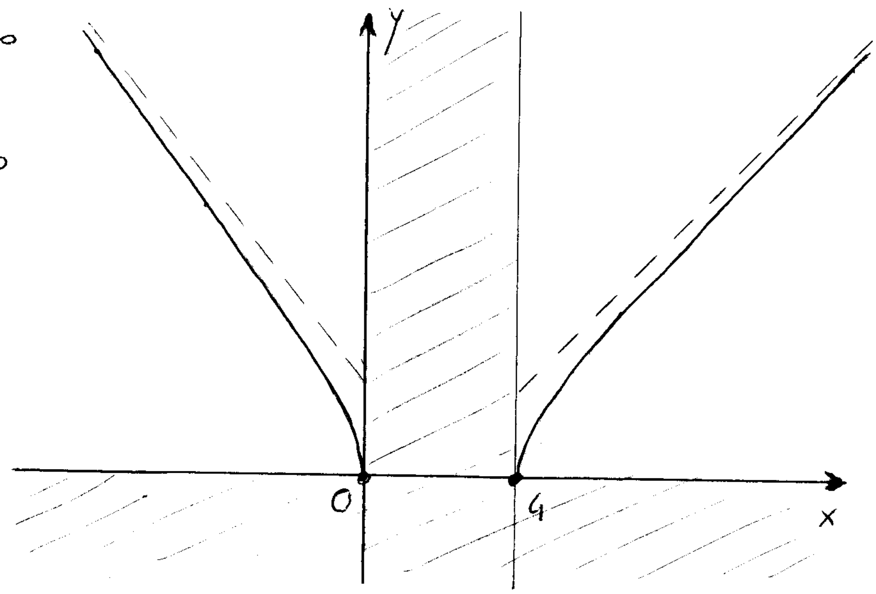
$y'>0$ PER $x>2$, ESSENDO IL DENOMINATORE SEMPRE POSITIVO. DUNQUE PER $x<0$ LA FUNZIONE È DECRESCENTE, PER $x>0$ È CRESCENTE.

DETERMINIAMO ORA IL LIMITE DELLA DERIVATA PRIMA IN CORRISPONDENZA DEGLI ESTREMI DEL SUO CAMPO DI ESISTENZA.

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x}} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 4^+} \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x}} = \frac{+2}{0^+} = +\infty$$

DUNQUE O E A SONO PUNTI A TANGENTE VERTICALE.



⑦ DERIVATA SECONDA. SI HA:

$$y' = (x-2)(x^2-4x)^{-\frac{1}{2}}$$

E QUINDI:

$$y'' = 1(x^2-4x)^{-\frac{1}{2}} + (x-2)\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2-4x)^{-\frac{3}{2}}\cdot(2x-4) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2-4x}} - \frac{(x-2)^2}{\sqrt{(x^2-4x)^3}} = \frac{\cancel{x^2}-\cancel{4x}-\cancel{x^2}-4+\cancel{4x}}{\sqrt{(x^2-4x)^3}} = \frac{-4}{\sqrt{(x^2-4x)^3}}$$

IL DENOMINATORE È SEMPRE POSITIVO, MENTRE IL NUMERATORE È SEMPRE NEGATIVO; DUNQUE LA DERIVATA SECONDA È DEFINITA NEGATIVA, E QUINDI LA CONCAVITÀ VOLGE SEMPRE VERSO IL BASSO. LA DERIVATA SECONDA NON SI ANNULLA MAI, QUINDI NON CI SONO PUNTI DI FLESSO.

ELEVANDO AL QUADRATO ENTRAMBI I MEMBRI DELLA NOSTRA FUNZIONE SI OTTIENE $y^2 = x^2-4x$, CIOÈ $x^2-y^2-4x=0$. SOMMANDO 4 AD ENTRAMBI I MEMBRI SI HA $x^2-4x+4-y^2=4$, CIOÈ $(x-2)^2-y^2=4$: È L'EQUAZIONE DI UNA IPERBOLE EQUILATERA CON CENTRO $(2;0)$ E RIFERITA AI SUOI ASSI (VEDI FIGURA).