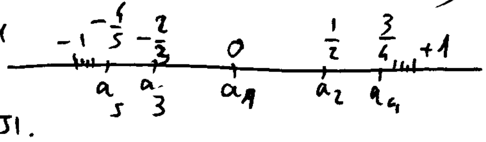
NOZIONI TOPOLOGICHE

DEF. 1 – DICESI INTERVALLO L'INSIEME FORMATO DA TUTTI I NUMERI COMPRESI TRA a E $b > a$
ES. $(3; 4]$ o $3 < x \leq 4$. ANCHE $(-\infty; 2]$ o $x \leq 2$ È UN INTERVALLO.

DEF. 2 – DICESI INTORNO DI x_0 UN INTERVALLO CHE CONTIENE x_0 COME PUNTO INTERNO.
ES. $2 \leq x \leq 5$ È UN INTORNO DI 3. SE x_0 È IL PUNTO MEDIO DELL'INTORNO, SI PARLA DI INTORNO CIRCOLARE; ESEMPIO: $(2-\varepsilon; 2+\varepsilon)$ o $2-\varepsilon < x < 2+\varepsilon$. SI SCRIVE I_{x_0}.
$(-\infty; a]$ SI DICE INTORNO DI $-\infty$; $[b; +\infty)$ si dice INTORNO DI $-\infty$;
$x < a \cup x > b$ SI DICE INTORNO DI INFINITO. $x_0 - \varepsilon < x < x_0$ SI DICE INTORNO SINISTRO DI x_0; $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$ SI DICE INTORNO DESTRO DI x_0.

DEF. 3 SI DICE CHE x_0 È PUNTO DI ACCUMULAZIONE DELL'INSIEME A SE, PRESO UN INTORNO PER QUANTO PICCOLO DI x_0, ESSO CONTIENE COMUNQUE INFINITI PUNTI DI A.
ES. $\left\{\frac{1}{n}; n \in N\right\}$ È UN INSIEME CHE HA $x_0 = 0$ COME PUNTO DI ACCUMULAZIONE. PRESO INFATTI UN INTORNO DI ZERO: $-\varepsilon < x < \varepsilon$, BASTA CHE SIA $\frac{1}{n} < \varepsilon$, CIOÈ $n > \frac{1}{\varepsilon}$, AFFINCHÉ TALE INTORNO CONTENGA INFINITI PUNTI DELL'INSIEME.
L'INSIEME $\left\{(-1)^n\left(1 - \frac{1}{n}\right); n \in N\right\}$ HA -1 E $+1$ COME PUNTI DI ACCUMULAZIONE, COME SI VERIFICA FACILMENTE (VEDI FIGURA); ESSI NON GLI APPARTENGONO. IL SEGMENTO $-1 \leq x \leq 1$ È TALE CHE TUTTI I SUOI PUNTI SONO DI ACCUMULAZIONE, ESTREMI INCLUSI.



DEF. 4 – UN INSIEME SI DICE CHIUSO SE CONTIENE TUTTI I SUOI PUNTI DI ACCUMULAZIONE, APERTO SE CIÒ NON AVVIENE. I DUE ESEMPI SUDDETTI COSTITUISCONO INSIEMI APERTI. $-1 \leq x < 1$ (-1 •—o $+1$) È APERTO PERCHÉ NON CONTIENE 1 CHE È SUO PUNTO DI ACCUMULAZIONE. $-1 \leq x \leq 1$ È CHIUSO. L'UNIONE DI UN INSIEME APERTO A CON TUTTI I SUOI PUNTI DI ACCUMULAZIONE SI DICE CHIUSURA $\bar{A}$ DI A. $[-1; 1]$ È LA CHIUSURA DI $[-1; +1)$. UN INSIEME TALE CHE TUTTI I SUOI PUNTI SONO DI ACCUMULAZIONE PER ESSO SI DICE DENSO. Q NON È DENSO, MA $\mathbb{R}$ LO È. I PUNTI NON DI ACCUMULAZIONE PER UN INSIEME SI DICONO PUNTI ISOLATI. OGNI SUCCESSIONE NUMERICA È FORMATA DA PUNTI ISOLATI. L'INSIEME $[-1; +1] \cup \{2\}$ HA 2 COME PUNTO ISOLATO.

DEF. 5 – SI DICE CHE L'INSIEME A È SUPERIORMENTE LIMITATO SE $\exists\, k$ TALE CHE $k > x, \forall x \in A$. k SI DICE ALLORA MAGGIORANTE DI A. SI DICE CHE È INFERIORMENTE LIMITATO SE $\exists\, k'$ TALE CHE $k' < x, \forall x \in A$. k' SI DICE MINORANTE DI A. UN INSIEME INFERIORMENTE E SUPERIORMENTE LIMITATO SI DICE LIMITATO.
ES. $\left\{\frac{1}{n}; n \in N\right\}$ È LIMITATO.

DEF. 6 – SI DICE CHE L È ESTREMO SUPERIORE DI A SE: a) L È MAGGIORANTE DI A, E b) SE, SCELTO ε PICCOLO A PIACERE, ESISTE UN ELEMENTO DI A MAGGIORE DI $(L-\varepsilon)$. SI INDICA CON $\operatorname{Sup} A$. SI DICE CHE l È ESTREMO INFERIORE DI A SE: a) l È MINORANTE DI A E b) SE, SCELTO ε PICCOLO A PIACERE, $\exists$ UN ELEMENTO DI A MINORE DI $(l+\varepsilon)$. SI INDICA CON $\operatorname{Inf} A$. SE $\operatorname{Sup} A \in A$, SI DICE MASSIMO DI A. SE $\operatorname{Inf} A \in A$, SI DICE MINIMO DI A. ESEMPIO: L'INSIEME $A = \left\{\frac{1}{n}; n \in N\right\}$ HA 1 COME ESTREMO SUPERIORE ED È ANCHE MASSIMO DI A PERCHÉ GLI APPARTIENE; HA ZERO COME ESTREMO INFERIORE, MA NON HA MINIMO PERCHÉ LO ZERO NON GLI APPARTIENE. MASSIMO E MINIMO SONO UNICI.

TEOREMA DI BOLZANO-WEIERSTRAß – UN INSIEME LIMITATO E FORMATO DA INFINITI PUNTI HA PERLOMENO UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE.