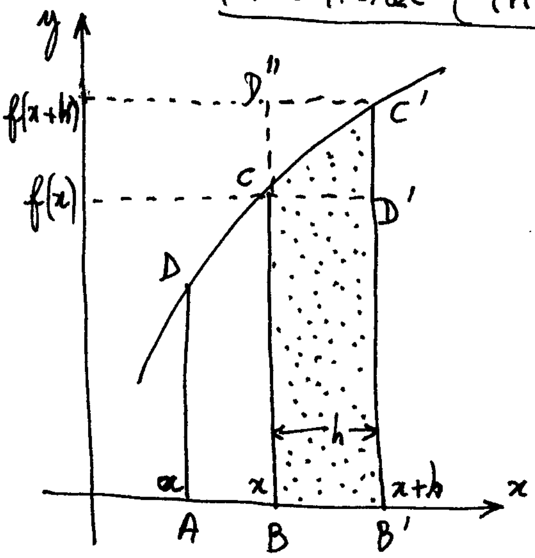
IL TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE (TH. DI TORRICELLI – BARROW)



DATA LA FUNZIONE $y = f(x)$ DEFINITA SULL'INTERVALLO $[a; b]$, DEFINIAMO LA FUNZIONE INTEGRALE:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

ESSA ESPRIME L'AREA (VEDI FIG.) DEL TRAPEZOIDE ABCD, COMPRESO TRA x ED a. ALLORA:

$$S_{ABCD} = F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

$$S_{AB'C'D} = F(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt$$

NE CONSEGUE CHE:

$$S_{BB'C'C} = S_{AB'C'D} - S_{ABCD} = F(x+h) - F(x)$$

DALLA FIGURA SI OSSERVA PERÒ CHE:

$$S_{BB'D'C} < S_{BB'C'C} < S_{B'B'C'D''}$$

$BB'D'C$ È UN RETTANGOLO DI BASE h E ALTEZZA $f(x)$, DUNQUE HA AREA $S_{BB'D'C} = h f(x)$; $BB'C'D''$ È UN RETTANGOLO DI BASE h E DI ALTEZZA $f(x+h)$, DUNQUE HA AREA $S_{BB'C'D''} = h f(x+h)$. SOSTITUISCO ED HO:

$$h f(x) < F(x+h) - F(x) < h f(x+h)$$

CIOÈ:

$$f(x) < \frac{F(x+h) - F(x)}{h} < f(x+h)$$

ORA:

$$\lim_{h\to 0} f(x) = f(x); \quad \lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x).$$

NE CONSEGUE, PER IL TEOREMA DEL CONFRONTO, CHE ANCHE LA FUNZIONE INTERMEDIA TENDE AD $f(x)$ PER $h \to 0$. MA ESSA È IL RAPPORTO INCREMENTALE DI $F(x)$, IL CUI LIMITE PER $h \to 0$ È PARI AD $F'(x)$. NE SEGUE:

$$\boxed{f(x) = F'(x)}$$

CIOÈ LA FUNZIONE INTEGRALE DI $f(x)$, NECESSARIA PER CALCOLARE LE AREE SOTTESE DA $f(x)$, È TALE CHE LA SUA DERIVATA PRIMA RIPRODUCE $f(x)$. L'OPERAZIONE CHE AD $f(x)$ ASSOCIA $F(x)$ SI CHIAMA <u>INTEGRALE INDEFINITO</u>, È UN <u>OPERATORE</u> E SI INDICA CON:

$$F(x) = \int f(x)\,dx \quad \text{(SENZA LIMITI)}$$

NE SEGUE CHE <u>L'INTEGRAZIONE INDEFINITA È L'OPERAZIONE INVERSA DELLA DERIVAZIONE</u> E COME QUESTA È UN'OPERAZIONE LINEARE.

ORA, $F(b) = \int_a^b f(x)\,dx$, $F(c) = \int_a^c f(x)\,dx$. NE SEGUE CHE:

$$\int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = F(c) - F(b) = \Big[F(x)\Big]_b^c$$

TALE FORMULA SI UTILIZZA PER IL CALCOLO DEGLI <u>INTEGRALI DEFINITI</u>.