Battistella Francesco
11/12/2010
Laboratorio di Fisica del Liceo Scientifico “L. da Vinci”

Misura della dimensione frattale

Materiale utilizzato:
5 diverse sferette di acciaio, 5 palline di carta stagnola, calibro ventesimale e bilancia.

Premessa teorica:

In genere i solidi hanno 3 dimensioni, le figure piane 2 e i segmenti una sola dimensione. In natura, però, esistono figure che hanno un numero di dimensioni pari ad un numero decimale; le dimensioni di queste figure, come il fiocco di neve o un ramo di un pino, si dicono frattali.

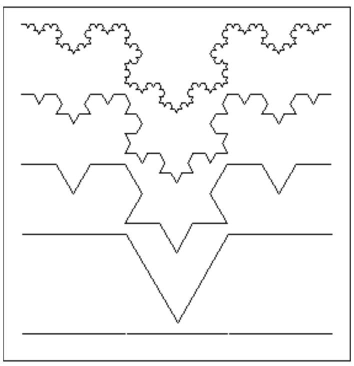
Un frattale è un oggetto geometrico che si ripete nella sua struttura allo stesso modo su scale diverse. Questa caratteristica è spesso chiamata autosomiglianza. Il termine frattale venne coniato nel 1975 da Benoît Mandelbrot e deriva dal latino `fractus` (rotto, spezzato), così come il termine frazione, di più antica origine; infatti le immagini frattali sono considerate, nella matematica moderna, oggetti di dimensione frazionaria.

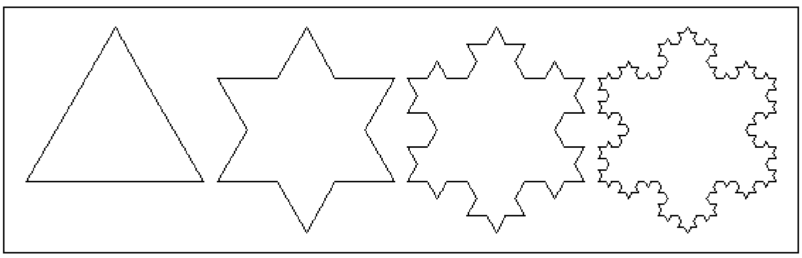
Dare una definizione soddisfacente di questi stranissimi enti matematici non è affatto facile: non ci è riuscito nemmeno il loro scopritore! In prima approssimazione possiamo affermare che una curva si dice frattale se ha la proprietà dell'autosimilitudine: ingrandendo un qualsiasi tratto di curva si visualizza un insieme di particolari altrettanto ricco e complesso del precedente; quindi si può affermare che la parte riproduce il tutto. Da ciò derivano due curiose caratteristiche delle curve frattali:

- pur essendo continue non ammettono una tangente unica in alcun punto;
- presi due punti della curva, anche vicinissimi tra loro, la distanza fra essi (misurata lungo la curva) è sempre infinita.

Quest'ultimo aspetto è facilmente verificabile in un fiocco di neve. Ad ogni ripetizione la lunghezza della curva cresce di un fattore 4/3: se il segmento di partenza ha lunghezza pari a 1, il secondo misura 4/3, il terzo 16/9, il quarto 64/27 e così via. Questa successione è chiaramente divergente, cioè tende ad assumere un valore infinito

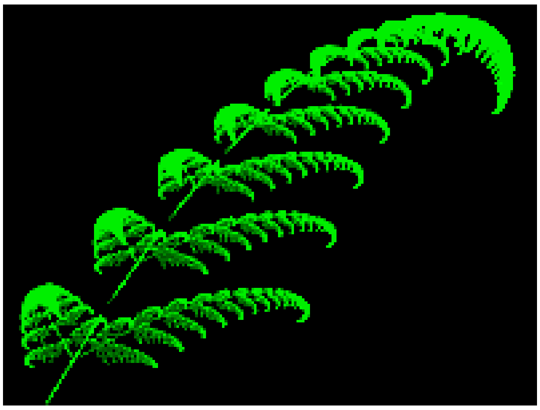
Un buon esempio di frattale costruito è il fiocco di von Koch.





Le figure soprastanti mostrano come si genera il cosiddetto “fiocco di neve di von Koch”: si prende un segmento lo si taglia in 3 parti e si sostituisce quella centrale con due segmenti di pari misura rispetto a quello eliminato; ora si ripete l'operazione con ciascuno dei quattro segmenti così ottenuti e si continua a ripeterla per un numero infinito di volte.
La curva che si ottiene dopo un numero infinito di iterazioni è una curva frattale e come tutte le curve frattali è dotata di affascinanti proprietà matematiche, facili da intuire ma, spesso, difficili da dimostrare.
Se il nome "fiocco di neve" sembra poco appropriato per la curva ottenuta spezzando un segmento, si cambia rapidamente idea osservando ciò che si ottiene applicando il procedimento appena descritto ai lati di un triangolo: semplicemente straordinario!

Per capire a fondo il significato di un frattale ci si può porre una domanda: “quanto è lunga la costa della Sardegna?”
Ebbene, la risposta può sembrare banale ma sorprenderà: la sua lunghezza è infinita!
Infatti dipende dalla scala alla quale viene fatta la misurazione: una valutazione sommaria fornisce un risultato relativamente basso che però cresce a dismisura se si inizia a prendere in considerazione ogni più piccolo promontorio, ogni anfratto, ogni scoglio, ogni granello di sabbia: insomma un tratto di costa può essere visto come un tratto di curva frattale.
In realtà i frattali sono in grado di rappresentare egregiamente una gran varietà di oggetti e fenomeni della Natura: non solo un tratto di costa ma anche i rami o le radici di un albero, una nuvola, le ramificazioni di un fulmine e la dentellatura di una foglia ne sono alcuni esempi.

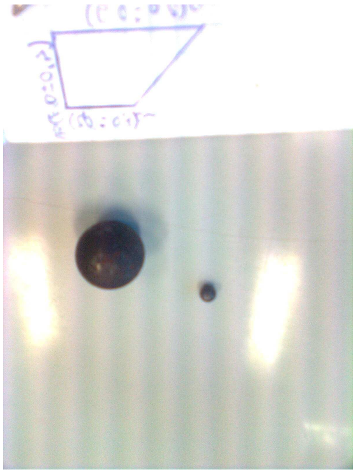
Esempi di frattali sono questi rametti di felce

Per calcolare il numero di dimensioni di una figura frattale bisognerebbe utilizzare i logaritmi, siccome noi non ne conosciamo ancora l’utilizzo ci possiamo servire del programma excel.
Come sappiamo il lato e la massa di un solido sono legati da una legge di proporzionalità diretta ($m \propto l^3$), quindi grazie al foglio di calcolo di excel possiamo calcolare il numero dell’esponente del lato, di modo da ottenere il numero (approssimativo) delle dimensioni.

Nella nostra esperienza abbiamo calcolato il numero di dimensioni di 5 sferette di acciaio (3 dimensioni) e di 5 palline di carta stagnola, suggeriteci dal professore come l’esempio di frattale più agevole da misurare; si tratta di frattali, per via delle increspature presenti sulla superficie della pallina, che ne rendono una parte simile al tutto; confermando così la proprietà di autosomiglianza.

Svolgimento dell'esperienza:

In questa esperienza, di per sé piuttosto semplice, l'aspetto fondamentale è la raccolta dei dati, più che il calcolo e la comprensione del significato concreto dei frattali (perché l'aspetto matematico ancora non riusciamo a capirlo).
Anzitutto abbiamo misurato con il calibro ventesimale le 5 sferette d'acciaio; dopodichè le abbiamo massate tutte



Il passaggio successivo è stato creare delle palline con la carta stagnola (alluminio), che simulassero un frattale, misurarne tre volte i diametri con il calibro ventesimale, calcolare la media tra le misure e massarli.

Dati e la loro elaborazione

La prima misura effettuata è stata il diametro delle sferette d’acciaio:

S_1 = (5,00±0,05)mm
S_2 = (10,90±0,05)mm
S_3 = (18,00±0,05)mm
S_4 = (22,10±0,05)mm
S_5 = (30,10±0,05)mm

Poi abbiamo massato le sferette

S_1 = (0,62±0,01)g
S_2 = (5,21±0,01)g
S_3 = (23,73±0,01)g
S_4 = (44,64±0,01)g
S_5 = (111,53±0,01)g

Sono riportati ora i dati dei diametri delle palline di stagnola. Ogni misura è stata ripetuta 5 volte e successivamente ne è stata calcolata la media aritmetica, con lo scopo di renderla il più possibile precisa.

1 (25,85±0,05)mm, (23,00±0,05)mm, (26,00±0,05)mm, (27,20±0,05)mm, (24,80±0,05)mm
2 (19,30±0,05)mm, (16,25±0,05)mm, (19,25±0,05)mm, (18,80±0,05)mm, (17,80±0,05)mm
3 (11,80±0,05)mm, (12,30±0,05)mm, (11,45±0,05)mm, (11,10±0,05)mm, (12,30±0,05)mm
4 (8,35±0,05)mm, (8,40±0,05)mm, (8,30±0,05)mm, (8,10±0,05)mm, (8,05±0,05)mm
5 (7,50±0,05)mm, (7,00±0,05)mm, (7,75±0,05)mm, (7,35±0,05)mm, (7,30±0,05)mm

Calcolando la media delle tre misurazioni, si ottiene il diametro di ogni pallina di stagnola.
p_1=(25,37±0,05)mm
p_2=(18,28±0,05)mm
p_3=(11,79±0,05)mm
p_4=(8,24±0,05)mm
p_5=(7,38±0,05)mm

Infine si massano tutte le palline

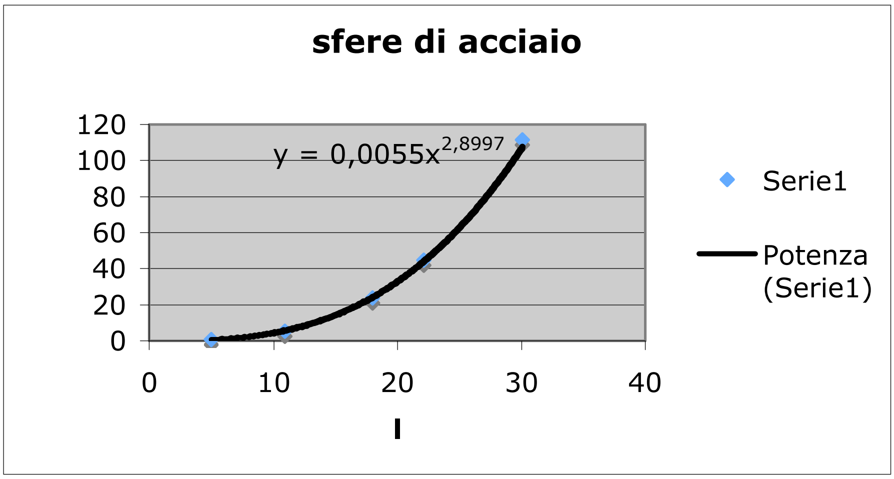
p_1 = (2,29±0,01)g
p_2 = (0,66±0,01)g
p_3 = (0,31±0,01)g
p_4 = (0,12±0,01)g
p_5 = (0,10±0,01)g

Nelle tabelle sottostanti sono raggruppati i dati principali calcolati durante l’attività svolta:

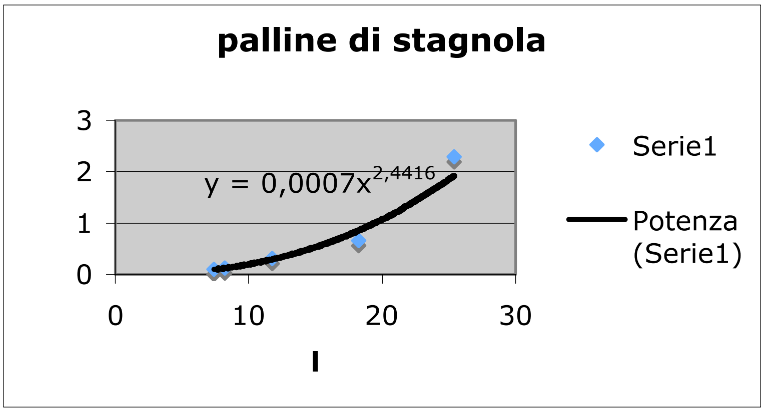
Sferetta n.°	d (mm)	m(g)
1	(5,00±0,05)mm	(0,62±0,01)g
2	(10,90±0,05)mm	(5,21±0,01)g
3	(18,00±0,05)mm	(23,73±0,01)g
4	(22,10±0,05)mm	(44,64±0,01)g
5	(30,10±0,05)mm	(111,53±0,01)g

Pallina n.°	d(mm)	m(g)
1	(25,37±0,05)mm	(2,29±0,01)g
2	(18,28±0,05)mm	(0,66±0,01)g
3	(11,79±0,05)mm	(0,31±0,01)g
4	(8,24±0,05)mm	(0,12±0,01)g
5	(7,38±0,05)mm	(0,10±0,01)g

Nel grafico sottostante, relativo alle sferette di acciaio, si può notare l'andamento delle grandezze e, come già espresso in precedenza, il numero delle dimensioni (l'esponente di x), in questo caso dovrebbero essere 3 ma 2,9 è un ottimo valore approssimato, perché ci sono degli errori di misura da considerare e un solido con superficie perfettamente liscia esiste solo teoricamente, perché a livello atomico ci saranno sempre delle superfici rugose.



In quest’altro grafico, relativo alle palline di stagnola, si può notare che il numero di dimensioni, pari a 2,4, corrisponde ad un frattale; in questo modo abbiamo comprso che l’esperienza è riuscita.



Conclusioni:

Con questa esperienza abbiamo compreso e verificato cosa fossero delle figure frattali, anche se non ne abbiamo calcolato noi il numero di dimensioni il lavoro svolto ci ha permesso di capire appieno questo affascinante mondo.

Bibliografia:

In questa ricerca sono state utilizzate le seguenti fonti:

Siti web:
Libero (http://digilander.libero.it/pnavato/frattali/)
Wikipedia (http://it.wikipedia.org/wiki/Frattale)

Libri:
AA.VV. Enciclopedia delle matematiche elementari e complementi, edizioni Hoepli, Volume quarto.