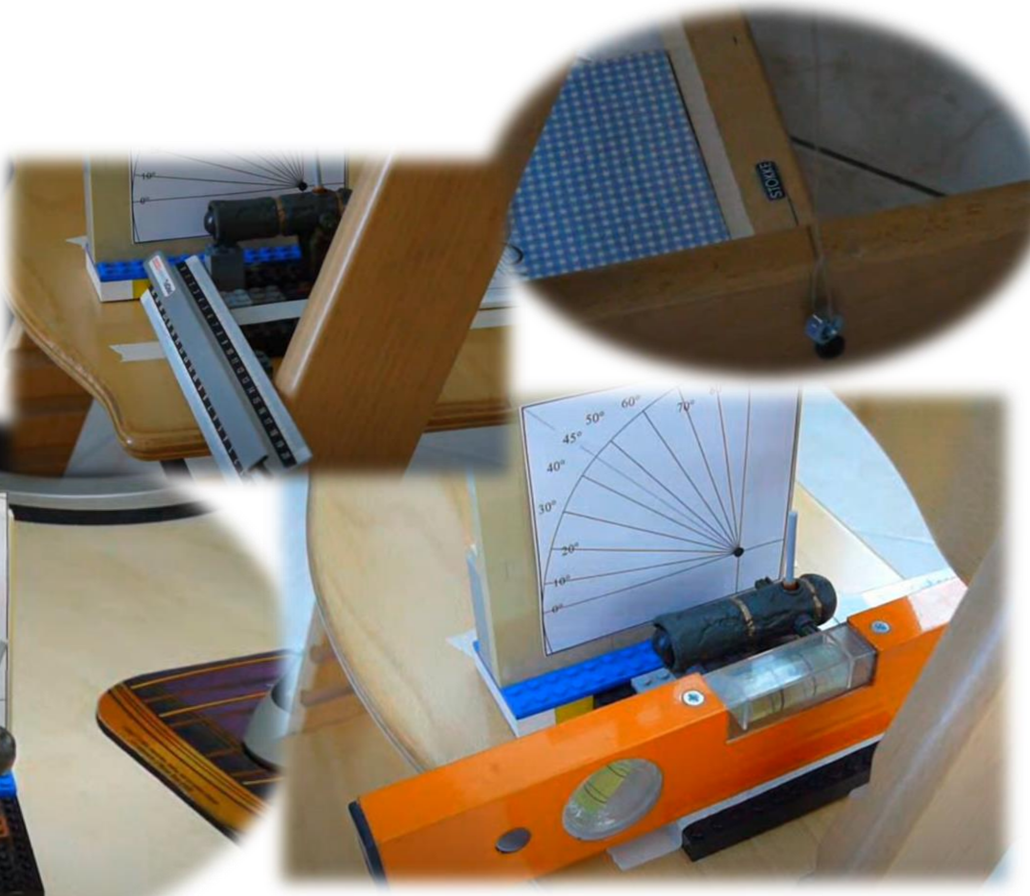
VERIFICA DELLE LEGGI DEL MOTO PARABOLICO

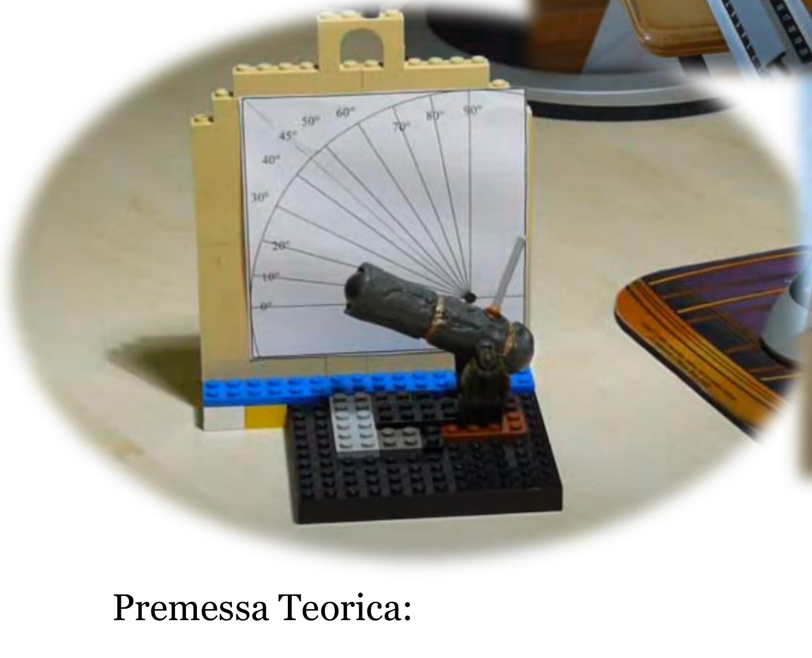
Deva Mucaj, Rebecca Pasta, 2°B

12/05/2020

Materiale Utilizzato:

- Cannoncino della *LEGO* + oggetto simile ad un proiettile;
- Goniometro cartaceo;
- Righello;
- Asta graduata;
- Sgabellino;
- Livella;
- Filo di piombo per trovare l'origine

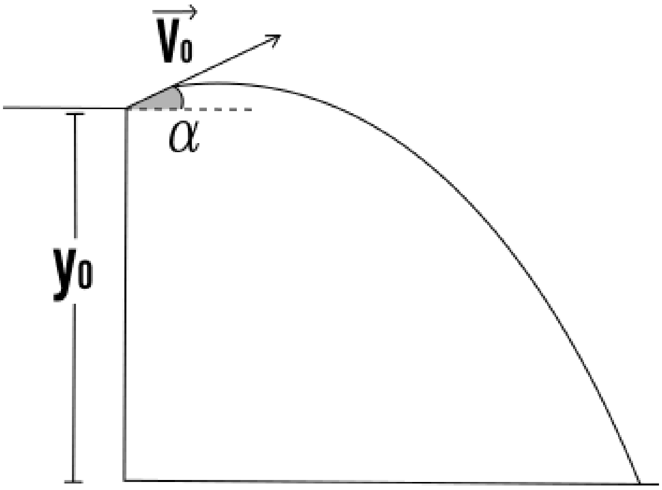


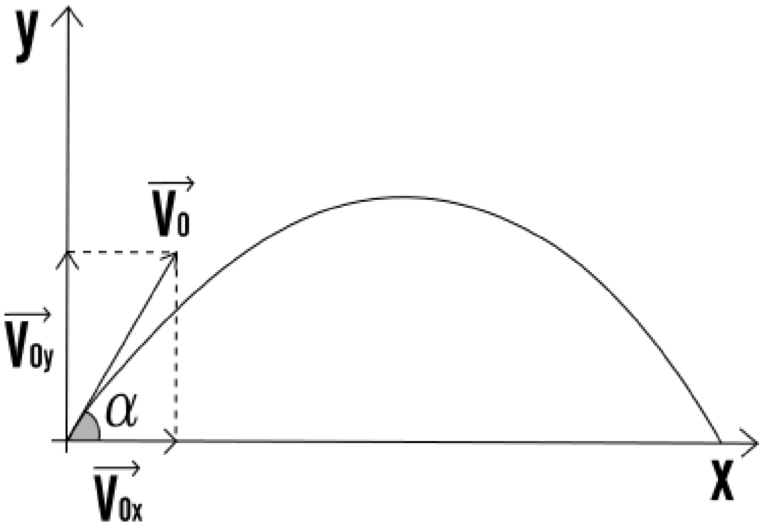


Premessa Teorica:

Il moto parabolico viene anche chiamato moto dei proiettili. Un "proiettile" può essere definito come un corpo puntiforme che viene lanciato in aria con una velocità iniziale che abbia almeno una componente orizzontale. La traiettoria che segue il proiettile, trascurando l'attrito dell'aria, è detta moto parabolico. Perciò, il moto parabolico è la composizione del moto rettilineo uniforme (MRU), lungo l'asse x, e del moto rettilineo uniformemente accelerato (MRUA), lungo l'asse y, tra di loro perpendicolari. La traiettoria seguita sarà quindi una parabola.

Esempi di moto parabolico possono essere un cannone che spara un proiettile da una torre o un proiettile lanciato in aria da terra.





Le leggi orarie lungo i due assi sono:

$$x = v_0 t$$

$$y = h - \frac{1}{2} g t^2$$

Sono equazioni parametriche perché x e y sono fissate in funzione del tempo.

Per trovare l'equazione della traiettoria, ossia la relazione tra x e y, basta eliminare il tempo. Per fare ciò si ricava, tramite la formula inversa, il tempo dalla legge oraria di x e, successivamente, si sostituisce nella legge oraria di y.

Perciò $t = \frac{x}{v_0}$ e $y = h - \frac{g}{2v_0^2} x^2$

Questa è l'equazione di una parabola, perciò il moto di un proiettile è parabolico.

La gittata (G) è la distanza percorsa da un proiettile dopo un certo tempo o prima di ricadere al suolo. Per trovare la gittata basta mettere a confronto l'equazione della traiettoria trovata, con y=0 da cui ricaviamo:

$$0 = h - \frac{g}{2v_0^2} x^2$$

$x = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$ --> gittata

Siccome $x = v_0 t$, si può ricavare, sostituendo, anche il tempo di volo, cioè: $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

Se, invece, si considera un lancio con un angolo di alzo diverso da zero si ricava che:

$$v_{ox} = v_o cos\alpha$$

$$v_{oy} = v_o sin\alpha$$

v_{ox} è costante orizzontalmente perché g ha solo componente verticale, mentre v_{oy} è la velocità iniziale in verticale. Quindi le due leggi orarie sono:

$$x = v_{0x}t$$

$$y = v_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2$$

Dalla legge oraria di x troviamo il tempo:

$$t = \frac{x}{v_{ox}}$$

In seguito, sostituiamo il tempo nella legge oraria di y trovando l'equazione:

$$y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x - \frac{g}{2v_{0x^2}}x^2$$

Anche questa è una parabola e non essendoci il termine noto, non parte dall'origine.

Per trovare la gittata si interseca l'equazione trovata, con l'asse x, quindi ponendo y=0:

$$\frac{g}{2v_{0x^2}} - \frac{v_{oy}}{v_{0x}}x = 0$$

Si trovano così due soluzioni

x=0 che equivale al punto di partenza e $x = \sqrt{\frac{2v_{0x}v_{0y}}{g}}$, che equivale alla gittata (G).

Siccome, per la formula di duplicazione, $2\sin(a)\cos(a) = \sin(2a)$, la gittata si può scrivere anche così:

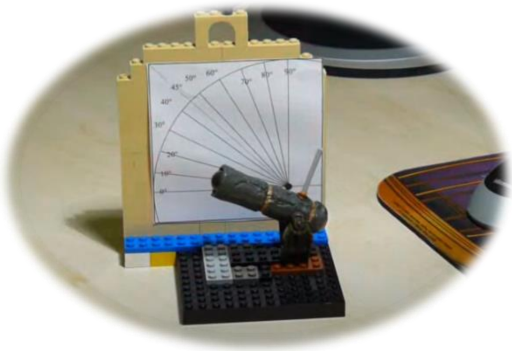
$$G = \frac{v_0^2 \sin(2a)}{g}$$

Il tempo di volo allora è: $t = \frac{2v_0 \sin(a)}{g}$

Per trovare l'altezza massima raggiunta dal proiettile durante il compimento della sua traiettoria, basta dividere per due la gittata e sostituirla nell'equazione della parabola al posto della x.

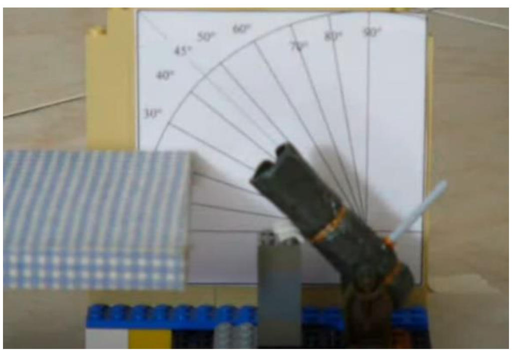
La massima gittata si ha quando l'angolo di alzo è di 45°, perché $sin(2a)$ ha il valore massimo, pari a 1, quando $2a$ è uguale a 90° e quindi quando a è uguale a 45°.

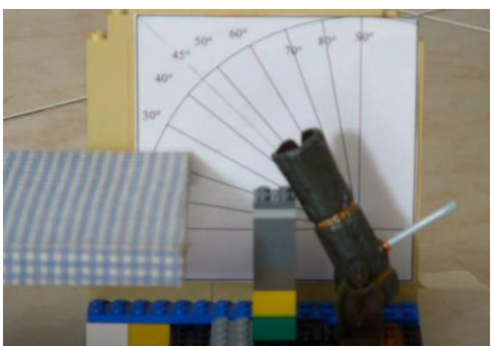
Procedimento:

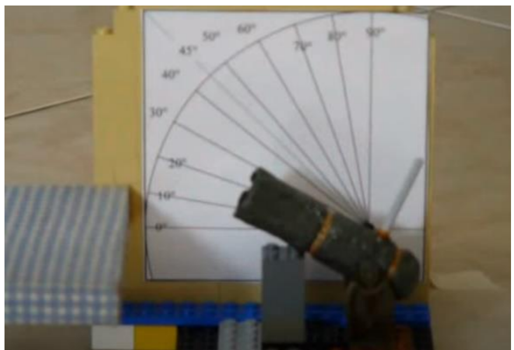


1. Per prima cosa è necessario posizionare il goniometro cartaceo a fianco del cannoncino, che a sua volta verrà collocato ad una altezza di circa 54 cm sopra ad uno sgabellino;
2. Successivamente, verrà posta un'asta graduata, con punto 0 corrispondente all'estremo della canna da dove verrà sparato il proiettile;

3. La canna del cannoncino, per questa parte dell'esperimento, dovrà avere inclinazione pari a $\alpha = 0°$;
4. Eseguire, quindi, 7 lanci iniziali per determinare la velocità di lancio del cannoncino, ossia v_0, e riportare a mano a mano la distanza dal punto di lancio che l'oggetto lanciato ha percorso, ossia la gittata. Quindi eseguire la media aritmetica tra i valori ottenuti;
5. Dopo di che, si dovranno eseguire ulteriori 7 lanci con il cannoncino posizionato ad altezza pari a h=0, e con inclinazione della canna pari a $\alpha = 45°$. Riportare anche qui le distanze ottenute ed eseguire la media aritmetica tra queste;
6. Ripetere l'esperimento con la canna posizionata ad $\alpha = 60°$ e $\alpha = 30°$ e riportare, anche qui, le 7 distanze ottenute per ogni inclinazione ed eseguirne la media aritmetica.







Elaborazione Dati:

Per prima cosa, come menzionato nel procedimento, sarà necessario calcolare la velocità iniziale, avendo a disposizione:

- La media tra le gittate di ogni singolo lancio (i lanci in totale sono 7 per volta);
- L'altezza a cui è posizionato il cannoncino;
- L'accelerazione gravitazionale, g.

La formula da utilizzare è la seguente: $v_0 = \sqrt{\frac{G^2 * g}{2h}}$, quindi: $v_0 = \sqrt{\frac{99^2 * 980}{2(54)}} = \sqrt{88935} = 298{,}2197\ cm/s.$

A questo punto, è necessario calcolare il componente della velocità orizzontale v_{0x} e verticale v_{0y}, tramite le seguenti formule:

$v_{0x} = v_0 * \cos a$

$v_{0y} = v_0 * \sin a$

Nel primo caso, abbiamo inclinazione $a = 0°$ e la velocità iniziale è, come calcolato prima, $v_0 = 298{,}2197\ cm/s$, quindi:

$v_{0x} = 298{,}2197 * \cos 0° = 298{,}2197\ cm/s$

$v_{0y} = 298{,}2197 * \sin 0° = 0\ cm/s$

Eseguire i due calcoli per ogni esperimento, ossia ad $a = 45°, a = 60°, a = 30°$

I risultati ottenuti sono:

- $a = 45°|\ v_{0x} = 210{,}8732\ cm/s|\ v_{0y} = 210{,}8732\ cm/s$
- $a = 60°|\ v_{0x} = 149{,}1099\ cm/s|\ v_{0y} = 258{,}2658\ cm/s$
- $a = 30°|\ v_{0x} = 258{,}2658\ cm/s|\ v_{0y} = 149{,}1099 cm/s$

Successivamente, ottenuti questi dati, sarà necessario calcolare il valore della gittata attesa (ossia quella teorica), in modo da poter poi calcolare lo scarto percentuale tra quella teorica e quella effettiva (data dalla media dei 7 valori diversi) a inclinazione 45°, 60° e 30°.

La formula che ci permetterà di eseguire il primo passaggio è la seguente: $G = \frac{2\, v_{0x}\, v_{0y}}{g}$; il calcolo verrà eseguito per i lanci effettuati a 45°, 60° e 30°; quindi:

- $a = 45°|\ G = \frac{2*210{,}8732*\ 210{,}8732}{980} = 90{,}75cm$
- $a = 60°|\ G = \frac{2*149{,}1099*\ 25{,}2658}{980} = 78{,}59cm$
- $a = 30°|\ G = \frac{2*258{,}2658*\ 149{,}1099)}{980} = 78{,}59cm$

Adesso possiamo confrontare i valori teorici con quelli effettivi, determinandone lo scarto percentuale tramite la seguente formula:

$\Delta\% = \frac{n2-n1}{n1}$.

Le medie delle varie misurazioni di ogni singolo esperimento sono:

- $a = 45°|$ 95cm
- $a = 60°|$ 90,286cm
- $a = 30°|$ 79,571cm

Quindi lo scarto percentuale sarà:

- $a = 45°|\ \Delta\% = \frac{95-90{,}75}{90{,}75} * 100\% = 4{,}7\%$
- $a = 60°|\ \Delta\% = \frac{90{,}286-78{,}59}{78{,}59} * 100\% = 14{,}9\%$
- $a = 30°|\ \Delta\% = \frac{79{,}571-78{,}59}{79{,}59} * 100\% = 1{,}2\%$

Raccoglimento Dati:

Accelerazione (g)	980 cm/s^2	980 cm/s^2	980 cm/s^2	980 cm/s^2
Altezza (h)	54cm	0cm	0cm	0cm
α°	0°	45°	60°	30°
Gittata(G) -1	105cm	90cm	95cm	81cm
-2	100cm	98cm	90cm	77cm
-3	97cm	96cm	94cm	72cm
-4	100cm	97cm	91cm	85cm
-5	97cm	96cm	90cm	83cm
-6	99cm	95cm	90cm	82cm
-7	95cm	93cm	82cm	77cm
Media Aritmetica valori gittata	99cm	95cm	90,286	79,571cm
Velocità Iniziale (v0)	298,2197 cm/s	298,2197 cm/s	298,2197 cm/s	298,2197 cm/s
v0x	298,2197 cm/s	210,8732 cm/s	149,1099cm/s	258,2658 cm/s
v0y	0 cm/s	210,8732 cm/s	258,2658cm/s	149,1099 cm/s
Gittata Attesa (G)		90,75 cm	78,59 cm	78,59 cm
Ɛ%		4,70%	14,90%	1,20%

Conclusione:

Abbiamo quindi dimostrato la validità delle formule del moto parabolico utilizzate, in quanto siamo riusciti ad ottenere tramite l'esperimento fisico dei valori simili a quelli calcolati manualmente attraverso le formule, nonostante la presenza di qualche errore sperimentale, dovuto sia all'imprecisione nel lancio del proiettile da parte del cannoncino, sia all'imprecisione che può esserci stata nel determinare in che punto (corrispondente ad un valore in centimetri) il proiettile toccava terra, da parte dell'occhio umano.