

Conservazione dell'energia nella dinamica rotazionale

Peruzzotti Mattia, 3^a A LSA

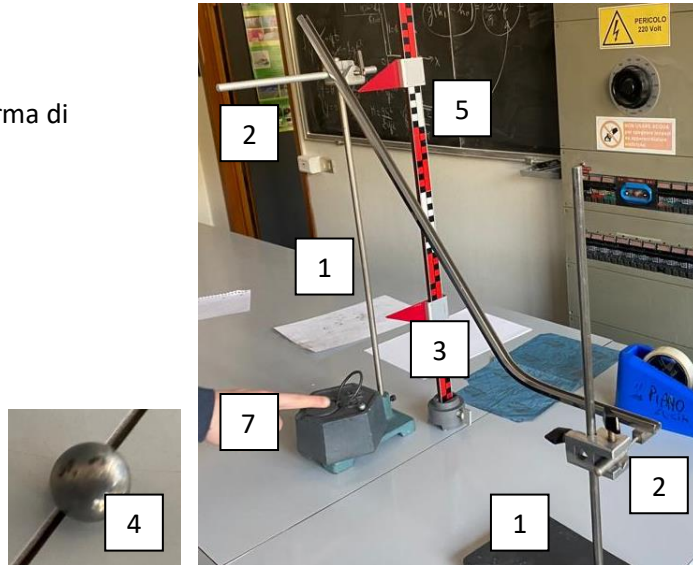
18 febbraio 2023

Laboratorio di fisica n°1 del Liceo Viale dei Tigli "Leonardo da Vinci" di Gallarate

Scopo: Verifica sperimentale della conservazione dell'energia nella dinamica rotazionale (energia cinetica rotazionale)

Materiale utilizzato

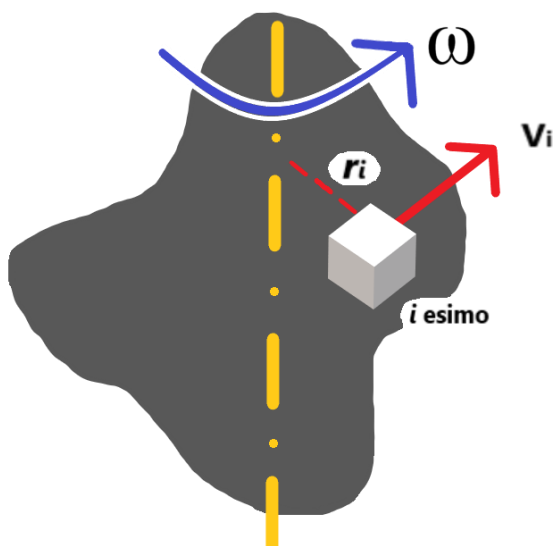
- 2 treppiedi (1);
- 2 aste orizzontali (2);
- Guida metallica con curva, a forma di parabola (3);
- Pallina di acciaio (4);
- Asta millimetrata (5);
- Flessometro;
- Carta carbone ;
- Peso di 5 kg (7).



Premessa teorica

L'esperienza da noi vissuta ci permetterà di verificare sperimentalmente la conservazione dell'energia cinetica rotazionale di una pallina che ruota su una guida metallica a forma di parabola.

Facendo riferimento all'esperienza "MISURA SPERIMENTALE DEL COEFFICIENTE DI ATTRITO DINAMICO CON CONSIDERAZIONI ENERGETICHE", possiamo affermare che se la pallina venisse considerata come un punto materiale, varrebbe l'equazione $E_{C_A} + E_{P_A} = E_{C_B} + E_{P_B}$, dove E_C corrisponde all'energia cinetica e E_P all'energia potenziale. A causa della rotazione del corpo, però, dovremo applicare considerazioni energetiche sulla dinamica rotazionale del corpo, differente da quella traslatoria.



Prendendo in considerazione il corpo rappresentato a lato, possiamo rappresentarlo come un corpo composto da elementi i più piccoli. Ogni corpo i avrà quindi una precisa distanza i dal centro e si muoverà con una velocità i . L'energia cinetica dell'intero corpo (grigio), sarà quindi pari alla somma delle energie cinetiche di ogni corpo i più piccolo, con i che varia tra 1 e N .

$$E_C = \sum_{i=1}^N E_{C_i} \rightarrow E_C = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Intorno all'asse del corpo (rappresentato di giallo), il corpo si muoverà di moto rettilineo uniforme. Facendo riferimento alle formule del MCU, sappiamo che $V = \omega r$ che, nel corpo rappresentato sopra, sarà pari a $V_i = \omega r_i$. Sostituendo nella formula prima descritta, avremo come risultato:

$$E_c = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$$

La formula può anche essere espressa come:

$$\frac{1}{2} \omega^2 \left(\sum_{i=1}^N m_i r_i^2 \right)$$

Possiamo quindi introdurre una nuova grandezza, l'**inerzia rotazionale** o momento di inerzia, che sarà pari a

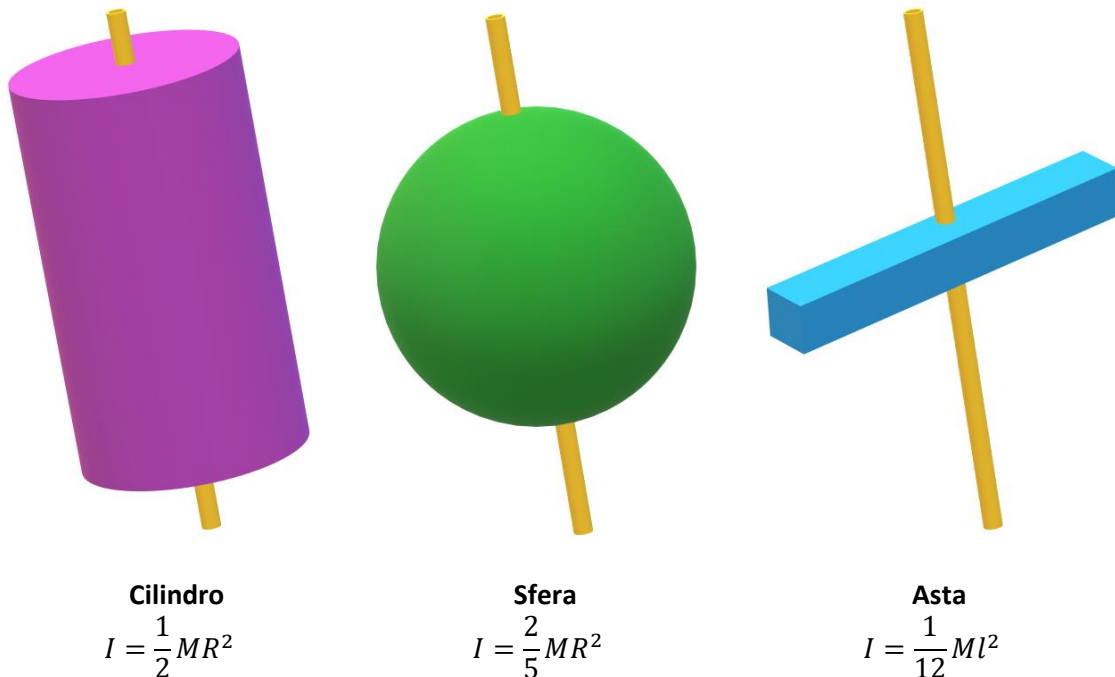
$I = \left(\sum_{i=1}^N m_i r_i^2 \right)$. Possiamo quindi riscrivere l'energia cinetica rotazionale, come:

$$E_c^{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Differente dall'energia cinetica traslazionale che è pari a $E_c^{tr} = \frac{1}{2} m V^2$.

L'**energia cinetica rotazionale** è l'energia necessaria per mettere e mantenere in rotazione un corpo.

Il valore dell'inerzia rotazionale dipende dei diversi corpi geometrici che si prendono in considerazione e viene calcolato tramite l'integrale $I = \iint_{corpo} r^2 dm$.



La rotazione di un corpo intorno al suo asse baricentrale, sarà quindi caratterizzato dalla formula: $E_c = \frac{1}{2} I \omega^2$. Il momento di inerzia non baricentrale, per un corpo che ha asse non passante per il baricentro, è caratterizzato dal teorema di Steiner: $I = I + MR^2$. Il momento di inerzia sarà pari

all'inerzia del corpo con asse passante per il baricentro e il prodotto tra la massa e la distanza tra l'asse non baricentrale e l'asse baricentrale al quadrato.

Ne deriva quindi che più le masse sono lontane dall'asse baricentrale, più il momento di inerzia sarà maggiore e quindi l'energia necessaria aumenterà.

Sappiamo che in un moto traslatorio, il momento angolare sarà pari a: $\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$. Facendo riferimento all'immagine riportata inizialmente sul corpo, formato da parti più piccole i , sarà pari a:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i$$

Procedendo con i calcoli:

$$L = \sum_{i=1}^N r_i m_i v_i \sin 90$$

Sapendo che in un MCU $v = r\omega$, otteniamo che:

$L = \sum_{i=1}^N r_i m_i r_i \omega$, ovvero: $L = (\sum_{i=1}^N r_i^2 m_i) \omega$, che può essere espressa come:

$$L = I\omega$$

Possiamo quindi creare una corrispondenza tra moto traslatorio e moto rotatorio.

Moto traslatorio	Moto rotazionale
$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$	$\omega = \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$
$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$	$\alpha = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$
m	I
F	M
p	L
$\frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{2}I\omega^2$

Nell'esperimento da noi eseguito, però, la pallina si muove sia di moto traslatorio, sia di moto rotazionale. L'equazione sarà quindi:

$$E_C^{TR}_A + E_C^{ROT}_A + E_{PA} = E_C^{TR}_B + E_C^{ROT}_B + E_{PA}$$

La pallina parte ferma, quindi la velocità iniziale sarà pari a 0 e di conseguenza $E_C^{TR}_A$ e $E_C^{ROT}_A$ saranno nulle. L'equazione sarà quindi:

$$E_{PA} = E_C^{TR}_B + E_C^{ROT}_B + E_{PA}$$

$$mgh_1 = \frac{1}{2}mV_f^2 + \frac{1}{2}I\omega_f^2 + mgh_0$$

Nell'esperimento da noi compiuto utilizzeremo una pallina, ovvero una sfera che, facendo riferimento a ciò che è riportato sopra, avrà: $I = \frac{2}{5}MR^2$. Sapendo inoltre che $\omega_f = \frac{v_f}{r}$

L'equazione sarà quindi:

$$mgh_1 = \frac{1}{2}mV_f^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2\right)\left(\frac{V_f^2}{r^2}\right) + mgh_0$$

$$gh_1 = \frac{1}{2}V_f^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)(V_f^2) + gh_0$$

$$g(h_1 - h_0) = \frac{1}{2}V_f^2 + \frac{1}{5}V_f^2$$

$$g(h_1 - h_0) = \frac{7}{10}V_f^2$$

Nell'esperimento da noi compiuto dovevamo verificare il valore della velocità finale ricavata secondo considerazioni energetiche (sopra riportate) con il valore ottenuto dal moto parabolico della pallina.

Il moto parabolico della pallina sarà quindi pari a:

$$\begin{cases} x = x_0 + V_0 t \\ y = H + V_0 t + \frac{1}{2}at^2 \end{cases}$$

Sapendo che La pallina parte dall'origine e che la velocità finale dopo la caduta saranno pari a 0, x_0 e $V_0 t$ saranno nulle.

$$\begin{cases} x = V_f t \\ y = H - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Sa cui ricaviamo che $t = \frac{x}{V_f}$, e quindi l'equazione:

$$y = H - \frac{1}{2}g \frac{x^2}{V_f^2}$$

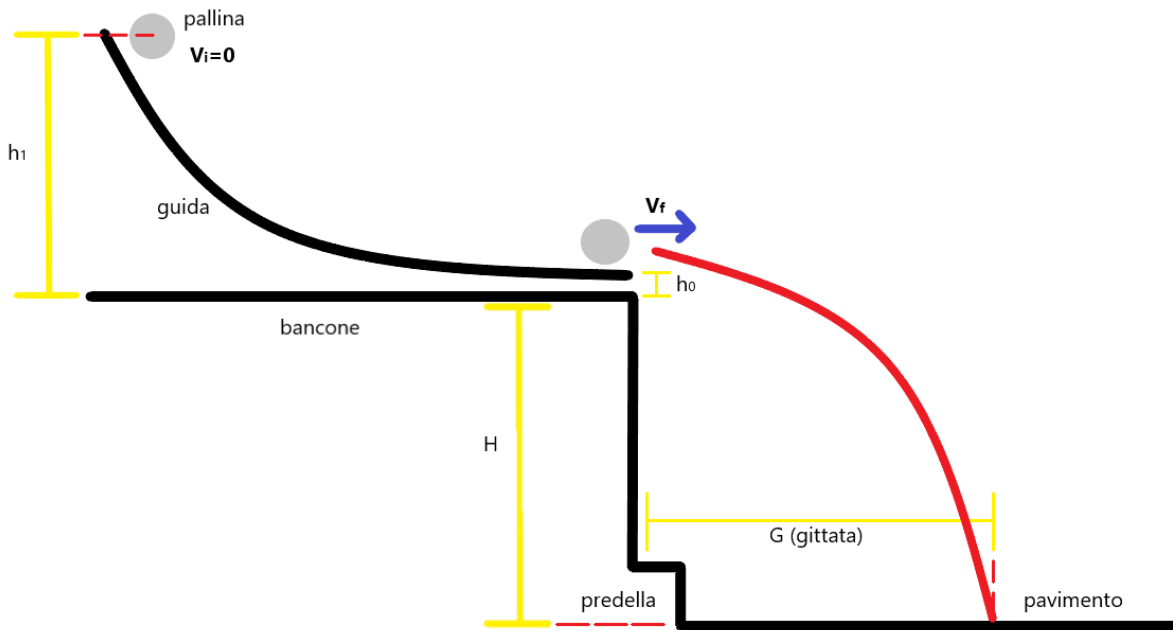
Intersecando la parabola appena ottenuta con l'asse delle x , otteniamo il punto in cui la pallina tocca terra.

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = H - \frac{1}{2}g \frac{x^2}{V_f^2} \end{cases} \rightarrow H = \frac{gG^2}{2V_f^2}, \text{ dove } G \text{ rappresenta la gittata.}$$

Otteniamo quindi che:

$$V_f = \sqrt{\frac{gG^2}{2H}}$$

Il sistema utilizzando nell'esperimento è riportato nella figura sottostante, dove è presente la guida metallica a forma di parabola e il moto parabolico della pallina una volta finita la guida.



Esecuzione dell'esperienza

Il giorno 18 febbraio 2023, ci siamo recati in laboratorio di fisica per verificare sperimentalmente la conservazione dell'energia cinetica rotazionale.

1. Abbiamo preparato il sistema di asta e treppiedi ponendo in bolla la guida utilizzando una livella digitale. Una volta raggiunta l'inclinazione migliore, abbiamo posto dei pesi sui treppiedi per far rimanere in posizione gli elementi.
2. Abbiamo preso tutte le misurazioni necessarie per eseguire i calcoli (le altezze dei diversi livelli).
3. Abbiamo eseguito 3 blocchi di misurazioni, ognuna contenente 3 misure.
4. Ogni misurazione era caratterizzata da:
 - a. Misurazione dell'altezza iniziale della pallina;
 - b. Lancio di prova della pallina sulla guida metallica, per capire dove sarebbe caduta;
 - c. Posizionamento della carta carbone;
 - d. Esecuzione dei tre lanci "ufficiali" e misurazione dalla predella al punto sulla carta carbone con il flessometro.
5. Abbiamo organizzato le misurazioni ed eseguito i calcoli.



Il sistema da noi utilizzato



I segni sulla carta carbone

Dati e la loro elaborazione

Abbiamo elaborato le misurazioni e organizzato le tabelle.

h_0 (altezza baricentro pallina nel punto più basso della guida metallica dal bancone)	H (altezza dal pavimento al bancone)	Profondità predella (utilizzata per la misura della gittata)
18,2 cm = 0,182 m	118,2 cm = 1,182 m	2,6 cm

Nella tabella sottostante sono riportati i diversi valori delle misurazioni.

	h_1 (altezza iniziale pallina)	G (gittata, a cui sommare la profondità della predella)
1	64,0 cm	96,1 + 2,6 cm = 98,7 cm
	64,0 cm	96,1 + 2,6 cm = 98,7 cm
	64,0 cm	96,3 + 2,6 cm = 98,9 cm
2	61,0 cm	92,0 + 2,6 cm = 94,6 cm
	61,0 cm	91,2 + 2,6 cm = 93,8 cm
	61,0 cm	91,1 + 2,6 cm = 93,7 cm
3	57,5 cm	84,6 + 2,6 cm = 87,2 cm
	57,5 cm	86,0 + 2,6 cm = 88,6 cm
	57,5 cm	87,5 + 2,6 cm = 90,1 cm
4	56,0 cm	85,3 + 2,6 cm = 87,9 cm
	56,0 cm	85,6 + 2,6 cm = 88,2 cm
	56,0 cm	86,8 + 2,6 cm = 89,4 cm

Nella tabella sottostante sono riportati i valori medi delle 4 prove.

Prova	h_1 (altezza iniziale pallina)	<G>
1	64,0 cm = 0,640 m	98,8 cm = 0,988 m
2	61,0 cm = 0,610 m	94,0 cm = 0,940 m
3	57,5 cm = 0,575 m	88,6 cm = 0,886 m
4	56,0 cm = 0,560 m	88,5 cm = 0,885 m

Successivamente abbiamo svolto i calcoli per ricavare la velocità finale:

Prima prova:

- Parabolica

$$V_f = \sqrt{\frac{gG^2}{2H}} \rightarrow V_f = \sqrt{\frac{9,8 \cdot (0,988)^2}{2(1,182)}} = 2,011 \frac{m}{s}$$

- Energetici

$$g(h_1 - h_0) = \frac{7}{10} V_f^2 \rightarrow V_f = \sqrt{\frac{10}{7} g(h_1 - h_0)} \rightarrow V_f = \sqrt{\frac{10}{7} 9,8(0,640 - 0,182)} = 2,532 \frac{m}{s}$$

Seconda prova:

- Parabolica

$$V_f = \sqrt{\frac{9,8 \cdot (0,940)^2}{2(1,182)}} = 1,910 \frac{m}{s}$$

- Energetici

$$V_f = \sqrt{\frac{10}{7} 9,8(0,610 - 0,182)} = 2,440 \frac{m}{s}$$

Terza prova:

- Parabolica

$$V_f = \sqrt{\frac{9,8 \cdot (0,886)^2}{2(1,182)}} = 1,76 \frac{m}{s}$$

- Energetici

$$V_f = \sqrt{\frac{10}{7} 9,8(0,575 - 0,182)} = 2,340 \frac{m}{s}$$

Quarta prova:

- Parabolica

$$V_f = \sqrt{\frac{9,8 \cdot (0,885)^2}{2(1,182)}} = 1,801 \frac{m}{s}$$

- Energetici

$$V_f = \sqrt{\frac{10}{7} 9,8(0,565 - 0,182)} = 2,315 \frac{m}{s}$$

Infine, per confrontare i valori ottenuti dagli esperimenti e dai calcoli parabolici ed energetici, abbiamo calcolato lo scarto percentuale, tramite la formula:

$$\text{Scarto}\% = \frac{(\text{valore più grande} - \text{valore più piccolo})}{\text{valore più piccolo}} * 100$$

Tra i due valori della velocità finale ottenuti

Primo esperimento	Secondo esperimento	Terzo esperimento	Quarto esperimento
25,9%	27,7%	32,9%	28,5%

Conclusione

Grazie all'esperienza da noi vissuta, siamo stati in grado di verificare in maniera ottimale, la conservazione dell'energia nella dinamica rotazionale. Il valore medio dello scarto percentuale ottenuto dai quattro esperimento è infatti di 28,8%, dato che conferma la riuscita dell'esperimento.

L'esperienza da noi realizzata, però, è lo stesso caratterizzata da errori, dovuti all'attrito (che, per ridurlo al minimo, abbiamo deciso di utilizzare una pallina, attrito volvente, al posto altri oggetti con attrito radente). Altri errori riscontrati si possono trovare nelle misurazioni effettuate e nella poca precisione degli strumenti di misura.