

# IL MISTERO DELLA MATERIA OSCURA E I SUOI FONDAMENTI MATEMATICI



**Relazione di Jacopo Roma 5D a.s. 2019/20**

## INTRODUZIONE

“Non sappiamo quasi niente dell’universo”, questa è la risposta del fisico Guido Tonelli alla nipote che gli chiede di cosa siamo a conoscenza. Effettivamente la comunità scientifica concorda col dire che la materia ordinaria composta da migliaia di galassie, stelle e pianeti, materia che possiamo osservare con un telescopio ottico, come quello *Hubble*, costituisce solo il 4,9% dell’intero universo, di cui le stelle formano quasi 1% percento mentre i gas e i pianeti la parte restante. Il resto è formato da materia oscura per il 26,8% e da energia oscura per il 68,3%. Tuttavia siamo ancora lontani dal capire con esattezza cosa siano la materia e l’energia oscura, ma risulta di fondamentale importanza capirlo se si considera che insieme costituiscono la stragrande maggioranza dell’universo in cui viviamo.

## DEFINIZIONE

La materia oscura costituisce ogni forma di materia presente nell'Universo che non emette radiazione elettromagnetica di alcun tipo, o che ne emette con intensità non rilevabile dagli strumenti, e che è rilevabile in modo indiretto tramite i suoi effetti gravitazionali. La materia oscura, quindi, unisce la cosmologia, ovvero la scienza dell’infinitamente grande, in quanto si trova nello spazio, con la fisica delle particelle, ovvero la fisica dell’infinitamente piccolo, in quanto probabilmente costituita da particelle a noi fino ad ora ignote. Ad oggi sappiamo che la materia oscura è una materia molto pesante che non emette luce e che non interagisce con la materia ordinaria se non tramite la gravità, il che rende molto difficile la sua individuazione a livello sperimentale. Non solo, nonostante la mancanza di certezze sulla composizione della materia oscura, esistono diverse teorie e modelli. Si attuano essenzialmente due tipi di distinzioni, il primo tiene conto della materia e distingue la materia oscura in barionica e in non barionica; l’altro considera la temperatura e distingue la

materia oscura in materia oscura fredda (CDM, Cold Dark Matter), costituita da particelle ignote più “lente”, e materia oscura calda (HDM, Hot Dark Matter), formata da neutrini, particelle molto veloci. La materia oscura barionica è costituita da materia simile a quella delle stelle e dei pianeti, quindi barioni, con la caratteristica però di non emettere radiazioni; oggetti astrofisici di questo tipo sono buchi neri, stelle di bosoni e nane brune. Particolari corpi celesti oscuri formati da materia barionica sono i cosiddetti MACHO (MASSive Compact Halo Object, “oggetto compatto massiccio di alone”), essi sono particolarmente densi e si trovano negli aloni sferici che circondano le galassie. Questi corpi celesti sono stati individuati tramite l’effetto della lente gravitazionale, un effetto spiegato dalla relatività generale; tuttavia costituiscono una minima parte della materia oscura. Dunque la materia oscura barionica non basta. Fino ad ora infatti si pensa che il 90% della materia oscura sia non barionica. Infatti, studiando l’abbondanza di deuterio è possibile risalire alla velocità di espansione dell’universo primordiale e tali risultati sono in accordo con la presenza, già dagli istanti subito successivi al Big Bang, di un tipo di materia non barionica, che avrebbe avuto un ruolo chiave nell’espansione dell’universo. Questa materia potrebbe essere rappresentata dalle WIMPs (“Weakly Interacting Massive Particles”, “Particelle massicce debolmente interagenti”) particelle non barioniche del tipo CDM. Queste particelle interagiscono solo tramite la gravità e l’interazione debole con la materia normale e non possono essere cercate nel modello standard. Infatti essendo particelle elettricamente neutre si escludono gli elettroni e i quark, essendo particelle stabili si escludono il neutrone e il bosone di Higgs ed essendo particelle pesanti si escludono i neutrini; dunque si tratta di particelle finora ignote. Data l’impossibilità di rivelare le particelle WIMPs, nel 2015 alcuni ricercatori del Lawrence Livermore National Laboratory (LLNL) hanno ipotizzato che la materia oscura sia formata da “quark oscuri”, confinati in nuclei con una massa pari a centinaia di volte quella di un protone o un neutrone, i quali formano la cosiddetta “stealth matter” (“materia furtiva”). Questa materia interagisce con la materia ordinaria solo tramite la forza gravitazionale. Un’altra teoria sulla composizione della materia oscura fu proposta nel 2014 da Hitoshi Murayama, dell’Università della California a Berkeley, e da Yonit Hochberg, della Hebrew University di Gerusalemme, i quali proposero le SIMP (“Strongly Interacting Massive Particles”, “Particelle massicce fortemente interagenti”). Queste particelle interagirebbero molto tra di loro, ma debolmente con la materia ordinaria. Secondo alcuni fisici, invece, la materia ordinaria interagisce con la materia oscura tramite una nuova forza che viene mediata dal cosiddetto fotone oscuro, ovvero una particella simile al fotone ma con la particolarità di possedere una piccola massa. Al momento, l’Istituto Nazionale di Fisica Nucleare ha avviato l’esperimento PADME (Positron Annihilation into Dark Matter Experiment), che ha luogo a Frascati. Esso utilizza un fascio di positroni che, interagendo con gli elettroni atomici, si annichilano e potrebbero produrre una coppia fotone luminoso - fotone oscuro.

Nonostante la presenza di diverse teorie che cercano di spiegare la composizione della materia oscura, ad oggi non abbiamo certezze, però disponiamo di tre prove cosmologiche che testimoniano la presenza della materia oscura dell’universo.

## PROVE DELL'ESISTENZA DELLA MATERIA OSCURA

Le prove cosmologiche sperimentali che testimoniano la presenza della materia oscura riguardano la rotazione delle galassie, la collisione degli ammassi di galassie e le misure di precisione in cosmologia. La prima prova riguarda la velocità di rotazione delle galassie e per capirlo si utilizza un paragone col sistema solare. Nel sistema solare infatti sappiamo che i pianeti più vicini al sole, per la sua grande massa ( $1,989 \times 10^{30}$  kg), subiscono un'attrazione gravitazionale maggiore e quindi presentano un moto di rivoluzione intorno al sole di durata minore rispetto ai pianeti lontani in accordo con le leggi di Kepler ( $T^2 = k r^3$ ), dunque si muovono con una velocità maggiore. A testimonianza di questo, mercurio, il pianeta più vicino al sole, ha un moto di rivoluzione di 88 giorni mentre Nettuno, il più lontano, di 165 anni. Per verificare quanto detto si utilizza la formula della forza centrifuga posta in equivalenza a quella centripeta e si calcola così la velocità dei due pianeti:

$$\frac{m V^2}{d} = G \frac{m M}{d^2}$$
$$V = \sqrt{\frac{M}{d} G}$$

Dove M è la massa del sole; d la distanza media del corpo celeste dal sole e G la costante di gravitazione universale.

MERCURIO:

$$d_{\text{media}} = \frac{(4,6 \cdot 10^7 + 6,9 \cdot 10^7) \text{Km}}{2} = 5,75 \cdot 10^{10} \text{ m}$$

$$V = \sqrt{\frac{1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}}{5,75 \cdot 10^{10} \text{ m}} \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N m}^2}{\text{Kg}^2}} = \sqrt{23 \cdot 10^8} = 48 \text{ Km/s}$$

NETTUNO:

$$d_{\text{media}} = \frac{(4,46 \cdot 10^9 + 4,53 \cdot 10^9) \text{Km}}{2} = 4,49 \cdot 10^{12} \text{ m}$$

$$V = \sqrt{\frac{1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}}{4,49 \cdot 10^{12} \text{ m}} \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N m}^2}{\text{Kg}^2}} = \sqrt{29,5 \cdot 10^6} = 5,4 \text{ Km/s}$$

Dai calcoli emerge che mercurio ha una velocità orbitale maggiore rispetto a Nettuno, in accordo con la teoria. Si ottiene dunque una curva con andamento decrescente. Ponendo, infatti,  $d=x$  (variabile indipendente) e  $v=y$  (variabile dipendente) la curva data avrà un andamento  $y=x^{-1/2}$ . Secondo le attuali teorie gravitazionali quindi, le curve di rotazione degli elementi di un sistema planetario o di una galassia dovrebbero avere questo andamento (sotto, grafico andamento della velocità dei pianeti in relazione alla distanza dal sole).

## STUDIO DI FUNZIONE:

STUDIO FUNZIONE:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

DOMINIO:  $x > 0$

INTERSEZIONI CON GLI ASSI:

$$f(x) \cap y=0 : x \in \emptyset$$

$f(x) \cap x=0$  : indefinito, quindi non ci sono intersezioni

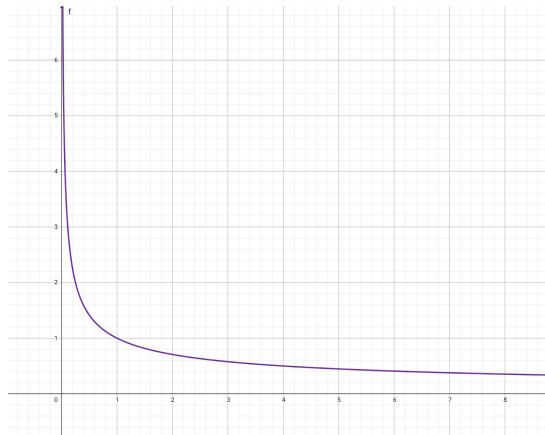
DERIVATA:

$$f'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

La funzione è decrescente nel suo dominio in quanto è sempre negativa.

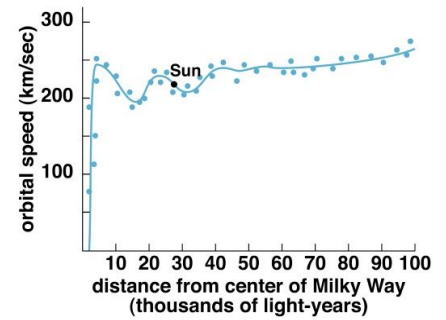
ASINTOTI:

1. ORIZZONTALE:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
2. VERTICALE:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$



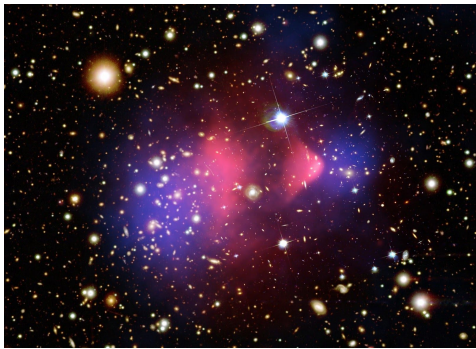
Ci si aspetterebbe, quindi, lo stesso comportamento anche per le galassie, ovvero con la parte centrale che presenta moto rotazionale a velocità maggiore rispetto alle parti più esterne della galassia stessa. Tuttavia ciò non avviene, anzi la velocità rimane all'incirca la stessa; quindi è chiaro che è presente una materia aggiuntiva che riempie la galassia e che fornisce una forza di attrazione gravitazionale supplementare, necessaria per tenere

legate alla galassia le stelle periferiche. Dunque è grazie a questa materia aggiuntiva, definita poi materia oscura, che nelle galassie le stelle più lontane dal centro presentano velocità prossime a quelle più vicine. Di seguito è riportato il grafico della velocità delle stelle nella via Lattea in funzione della loro distanza.



(e) Copyright © Addison Wesley

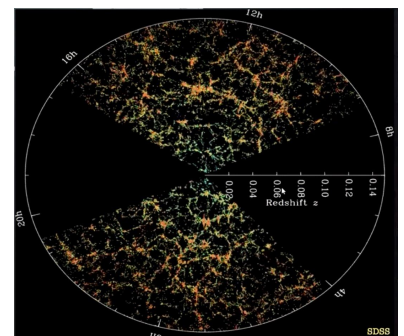
La seconda prova cosmologica riguarda la collisione degli ammassi di galassie. Per quanto riguarda questa prova disponiamo di tre livelli di osservazione. Possiamo osservare il fenomeno da un punto di vista ottico, con un telescopio ottico, ma potremmo vedere solo la luce delle galassie e quindi è difficile che ci sia una vera collisione ovvero uno scontro tra le stelle in quanto presentano una notevole distanza tra di loro, quindi vedremo semplicemente degli ammassi di galassie che si passano attraverso. Il secondo livello di osservazione utilizza un telescopio a raggi X che registra l'emissione di raggi X sviluppati in seguito all'attrito delle nubi di gas presenti nelle rispettive galassie in seguito alla loro collisione e quindi al loro riscaldamento. Il terzo livello di osservazione avviene tramite la lente gravitazionale.



Ipotizzando la presenza di una galassia posta in posizione diametralmente opposta al “Bullet cluster” ovvero al sito di collisione delle galassie, siamo in grado di vedere la galassia grazie alla deflessione della luce. Grazie alla lente gravitazionale possiamo notare che la massa del “Bullet Cluster” risulta essere molto più pesante rispetto a quella che possiamo determinare con gli altri due livelli di osservazione. Dunque gli ammassi di galassie dicono che esiste una materia aggiuntiva che non emette luce, che è neutra e che non interagisce né con la materia ordinaria né con sé stessa, infatti in seguito alla collisione non è riscontrabile nessun prodotto dato dall'attrito, come nel caso dei raggi X emessi dalle nubi di gas.

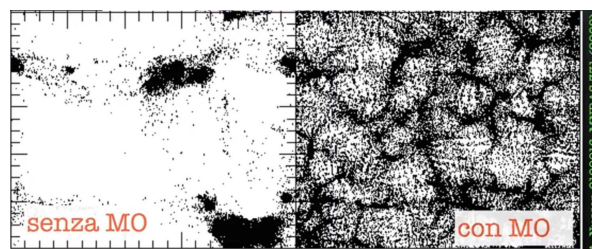
Un esempio del cosiddetto “Bullet Cluster” è costituito da questa coppia di ammassi di galassie posti a 3,7 miliardi di anni luce da noi (*in foto*), che si sono scontrati in una collisione ad alta velocità. Le immagini riprese con un telescopio ottico e con uno a raggi X (in rosso), insieme alle misurazioni di lente gravitazionale (in blu) rivelano la presenza di materia oscura, infatti interagendo meno della materia ordinaria le particelle di materia oscura (blu) si sono attraversate a vicenda senza una grande interazione, a differenza della collisione che ha rallentato le nubi di gas visibili (rosso), lasciandole così “indietro”.

La terza prova sperimentale cosmologica riguarda le misure dette di cosmologia di precisione. Simulando l'intero universo, considerando la terra come punto centrale, in quanto è il nostro punto di osservazione, si nota una distribuzione non omogenea delle galassie, le quali si dispongono in modo analogo a una ragnatela. La causa scatenante di questo fenomeno è data appunto dalla materia oscura. Esistono



simulazioni, infatti, come il progetto “Acquarius” in collaborazione con “Virgo”, che si avvalgono di complessi strumenti matematici per capire come sia distribuita la massa all’interno dell’universo. Se nella nostra simulazione inseriamo la materia oscura (in particolare inseriamo  $1,5 \times 10^9$  particelle di materia oscura) otteniamo un modello simile a quello osservato tramite i telescopi, quindi simile al nostro universo.

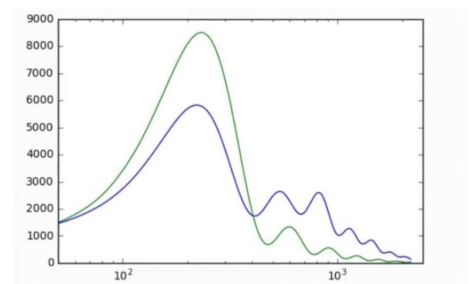
Se nella nostra simulazione non consideriamo la materia oscura, il nostro modello presenta degli ammassi di galassie più lontani tra di loro e l’effetto “a ragnatela” è meno evidente. Non solo, Joshua Frieman del Fermilab e collaboratori, lavorando a questo progetto, hanno calcolato gli effetti di lente gravitazionale nell’intera area di cielo osservata e hanno ricostruito la distribuzione della materia oscura nell’universo, scoprendo che essa sarebbe più diffusa e meno concentrata di quanto ipotizzato.



Infine grazie all’esperimento Planck dell’ESA si sono calcolate le anisotropie, ovvero le differenze di temperatura della radiazione cosmica di fondo che permea l’universo. I risultati di Planck si possono individuare col parametro  $\Omega$ , che esprime il rapporto tra la densità  $\rho$  della componente di massa energia e la densità critica  $\rho_c$ , ovvero un valore di densità media.

$$\Omega = \rho / \rho_c$$

Queste misure hanno consentito di calcolare le stime percentuali di materia presente nell’universo, trovando un 4,9% di materia barionica e un 26,8% di materia oscura; dunque la materia corrisponde solo al 31,7 % della densità critica. Inoltre se si traccia un grafico della fluttuazione di radiazione cosmica, si trova una curva spiegabile solo con la presenza di materia non barionica. In particolare, la curva verde rappresenta ciò che dovremmo trovare in caso di sola materia barionica, mentre in blu è rappresentato il grafico in accordo con le osservazioni sperimentali. L’equazione sulla radiazione ricavata per via teorica dalle rilevazioni di Planck è la seguente:



$$u(f, T) = \frac{8 \pi h}{c^3} \cdot \frac{f^3}{e^{\frac{hf}{k_B T}} - 1}$$

Ora, per studiare la funzione poniamo  $x$  al posto di  $f$  (frequenza) e  $y$  al posto di  $u$  (emissività), poniamo le costanti moltiplicative pari ad uno e fissiamo la temperatura  $T$  a  $2,7k$ ; otteniamo così la funzione:

$$Y = \frac{x^3}{e^{10x/27} - 1}$$

DOMINIO:  $x \in \mathbb{R} - \{0\}$

INTERSEZIONI CON GLI ASSI:

$f(x) \cap y=0 : x \in \emptyset$

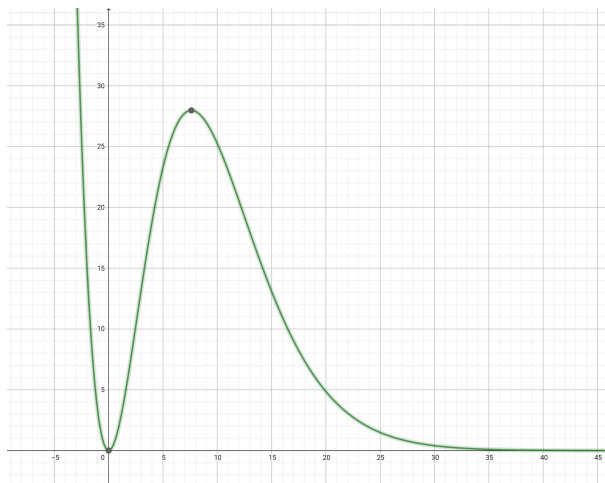
$f(x) \cap x=0 : \text{indefinito, quindi non ci sono intersezioni}$

DERIVATA:

$$f'(x) = \frac{81 x^2 e^{10x/27} - 81 x^2 - 10x^3 e^{10x/27}}{27(e^{10x/27} - 1)^2}$$

ASINTOTO ORIZZONTALE:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

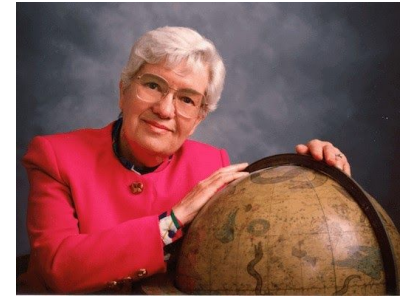


## STORIA

Il primo a ipotizzare l'esistenza di una materia aggiuntiva a quella visibile fu l'astronomo svizzero Fritz Zwicky (*in foto*) durante alcuni studi che tenne nel 1933 sulla massa e sul moto di due ammassi di galassie, rispettivamente l'ammasso della Chioma e quello della Vergine. Egli infatti calcolò, a partire dalla velocità di



rotazione delle stelle dell'ammasso della Chioma, che la massa dell'ammasso doveva essere circa 400 volte maggiore rispetto alla massa delle stelle che emettevano luce. La massa della materia visibile, quindi, non poteva spiegare l'elevata velocità di rotazione osservata; e così ipotizzò l'esistenza della materia oscura, materia non visibile e di origine sconosciuta. Tuttavia a causa del suo carattere arrogante e irascibile le sue teorie rimasero inascoltate per anni. Fu solo nel 1970 che l'astronoma Vera Rubin (*in foto*) confermò la presenza della materia oscura osservando il fenomeno della velocità della rotazione delle galassie a spirale in particolare della Via Lattea, in apparente contrasto con la terza legge di Kepler e spiegato solo ammettendo l'esistenza di una materia molto pesante e non visibile. Si accorse infatti che anche le stelle più lontane dal centro della galassia si muovono a velocità prossime a quella del sole (220 km/s) che occupa una posizione intermedia.



Nel 1983 il fisico israeliano Mordehai Milgrom ipotizzò la teoria MOND, acronimo di «Modified Newtonian Dynamics », ovvero dinamica newtoniana modificata, al fine di spiegare le osservazioni cosmologiche e la dinamica delle galassie evitando di introdurre il concetto di materia oscura. La sua teoria spiegava la rotazione delle galassie con l'aggiunta di un coefficiente alla seconda legge della dinamica. La formula appare dunque:

$$F = m a \mu(a)$$

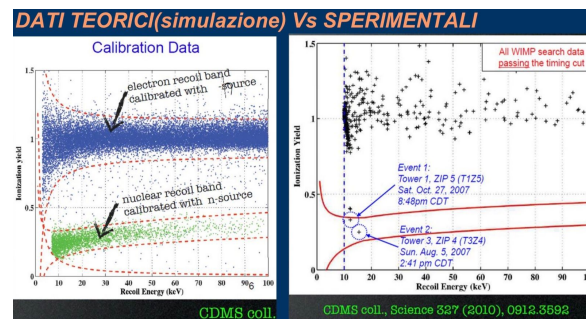
Tuttavia questa teoria se da un lato spiega la velocità della rotazione delle galassie, non spiega né il fenomeno della collisione degli ammassi di galassie né le misure di cosmologia di precisione. Inoltre uno studio condotto nel 2018 in Brasile da un gruppo guidato da Davi Rodrigues ha escluso l'ipotesi MOND, in quanto questa si propone come una teoria generale che è incompatibile con la necessità di specifiche regolazioni per ogni galassia.

## RIVELAZIONE DELLA MATERIA OSCURA

Non interagendo con la materia, le particelle di materia oscura possono essere rivelate solo tramite effetti indiretti, tuttavia forse un po' di interazione è presente. I metodi per rivelare le particelle di materia oscura sono essenzialmente tre, ovvero la rivelazione diretta, quella indiretta e la produzione di particelle. Il primo metodo, ovvero la rivelazione diretta, si avvale di un blocco di materiale poco radioattivo, in genere il germanio (Ge) o il piombo (Pb) prodotto in età romana, e lo si posiziona al di sotto di una montagna o in una miniera in modo che la quantità di roccia schermi l'esperimento dai raggi cosmici. Se una particella di materia oscura entra nel



blocco, fa scatenare un elettrone che viene attirato dalla piastra positiva degli elettrodi posti all'estremità del blocco stesso. Si assiste dunque a un passaggio di micro corrente dato dal movimento degli elettroni; si ha perciò una ionizzazione e produzione di calore (si noti che l'esperimento è tenuto a 20mK). Per comprendere se la natura della particella sia effettivamente materia oscura è necessario calcolare il rapporto tra la ionizzazione e il calore prodotto; se tale rapporto è pari a uno, l'evento è dovuto dal rumore di fondo, per esempio dalla radioattività naturale o dalla impurità della roccia, se l'evento è dovuto dalla materia oscura il risultato è pari a 1/3. Tuttavia gli eventi visualizzati per la prima volta con questo metodo dall'esperimento CDMS (Crio Dark Matter Source) del 2010 sono soltanto un paio e non abbiamo la certezza che sia effettivamente materia oscura. È chiaro, perciò, che siano esperimenti molto complicati da osservare sia per la necessità di ambienti "purissimi", sia perché si parla di 1 evento per chilogrammo di rivelatore per anno, mentre nel caso del corpo umano si parlerebbe di  $10^{10}$  eventi per chilogrammo di rivelatore per anno.



Un altro metodo utilizzato per verificare che gli eventi siano causati da materia oscura consiste nel raccogliere tutti gli eventi e rivelare la modulazione annuale. Nel periodo di maggio/giugno infatti la terra si muove nella stessa direzione del sole, che a sua volta ruota intorno al centro della galassia, e si registra un vento di particelle di materia oscura di intensità maggiore rispetto ai mesi di novembre/dicembre in cui la terra gira nella direzione opposta rispetto al sole, in quanto alla velocità della terra si somma quella del sole. Esistono esperimenti, come DAMA (attivato nel 1917 al Gran Sasso), che hanno rilevato più eventi a maggio confermando la teoria. Tuttavia la maggior parte dei fisici sostiene che i presunti segnali della materia oscura rilevati dall'esperimento DAMA sarebbero indistinguibili da quelli dovuti alla materia ordinaria di origine terrestre. Inoltre altri esperimenti hanno prodotto risultati in apparente contraddizione con DAMA, per esempio l'esperimento ANAIS attivo in Spagna ha pubblicato risultati in disaccordo con quelli di DAMA.

Uno degli esperimenti più interessanti e promettenti, INITIUM (an Innovative Negative Ion Time projection chamber for Underground dark Matter searches), si sta svolgendo nel Gran Sasso a cura di Elisabetta Baracchini, assistant professor al Gran Sasso Science Institute e ricercatrice all'Infn, e di Massimiliano Fiorini, ricercatore all'Infn e tenure track associate professor all'Università di Ferrara, e consiste nella realizzazione di un rivelatore innovativo per la ricerca diretta di materia oscura; progetto finanziato dallo European Research Council (Erc) con 4 milioni di euro. Il rivelatore da loro progettato utilizza un gas come bersaglio; nel momento

in cui una particella di materia oscura urta un atomo di gas, quest'ultimo si muove lasciando una traccia di elettroni. Gli elettroni così formati vengono raccolti tramite un campo elettrico su un anodo, nel quale vengono amplificati, ovvero moltiplicati, in modo da facilitare l'individuazione; durante questo processo di amplificazione si produce luce, quindi fotoni, in modo da poter fotografare la traccia di elettroni. In questo modo possiamo studiare la traiettoria e la direzionalità della particella iniziale che ha scatenato l'urto e questo è essenziale per capire la provenienza delle particelle di materia oscura e quindi identificare in modo inequivocabile l'evento; infatti gli eventi di radioattività naturale possono arrivare da tutti i lati, mentre quelli di materia oscura hanno una direzione preferenziale data dal vento apparente di particelle originato dalla rotazione della terra.

Il secondo metodo per la rivelazione della materia oscura consiste nella rivelazione indiretta, ovvero si ricerca un eccesso di particelle note nell'universo in seguito a un annichilimento delle particelle di materia oscura dato da una collisione delle particelle stesse. Nel 2008 il satellite Pamela ha registrato un eccesso di positroni, mentre nel 2009 il satellite Fermi della NASA ha registrato un eccesso di raggi gamma, spiegabili ammettendo la collisione di particelle di materia oscura. Tuttavia l'AMS localizzato sulla stazione spaziale internazionale non ha confermato né la rilevazione del satellite Pamela né quella del satellite Fermi.

Ultimo metodo per rivelare le particelle di materia oscura è cercare di produrle; questo esperimento prende il nome di CMS e ha luogo all'LHC del CERN di Ginevra. Per ottenere particelle di materia oscura l'idea è quella di far collidere dei protoni ad alta energia (7Tev) e, per capire se si sia effettivamente creata della materia oscura, questi dovrebbero scomparire, in quanto la materia oscura non interagisce con la materia ordinaria e, anche producendola, non potremmo osservarla. Tuttavia al momento non si è segnalata nessuna produzione di materia oscura.

Infine, da una ricerca dell'Università Sapienza di Roma e dell'Istituto nazionale di fisica nucleare pubblicata a giugno 2020, emerge la possibilità di individuare le particelle di materia oscura dalle onde gravitazionali emesse dai buchi neri.

## CONCLUSIONE

Come dichiarato da Bruce H. Margon, astronomo all'Università di Washington, in occasione di un'intervista al New York Times nel 2001: "E' una situazione alquanto imbarazzante dover ammettere che non riusciamo a trovare il 90% [della materia] dell'Universo". Tuttavia la teoria della materia oscura è oggetto di continui studi e il suo mistero continua ad affascinare generazioni di appassionati e ricercatori.

## RIFERIMENTI

1. <https://www.lngs.infn.it/it/materia-oscuro>
2. [www.fmboschetto.it/tde4/oscura.htm](http://www.fmboschetto.it/tde4/oscura.htm)
3. <https://youtu.be/nZDiUQ6KpwY>
4. [https://youtu.be/-FJJt\\_H5L2g](https://youtu.be/-FJJt_H5L2g)
5. [http://www.bo.astro.it/~ciotti/did/LT/LT\\_25.pdf#page25](http://www.bo.astro.it/~ciotti/did/LT/LT_25.pdf#page25)
6. [https://www.repubblica.it/scienze/2020/06/08/news/cosi\\_i\\_buchi\\_neri\\_ci\\_aiutano\\_a\\_svelare\\_la\\_materia\\_oscuro-258707266/](https://www.repubblica.it/scienze/2020/06/08/news/cosi_i_buchi_neri_ci_aiutano_a_svelare_la_materia_oscuro-258707266/)