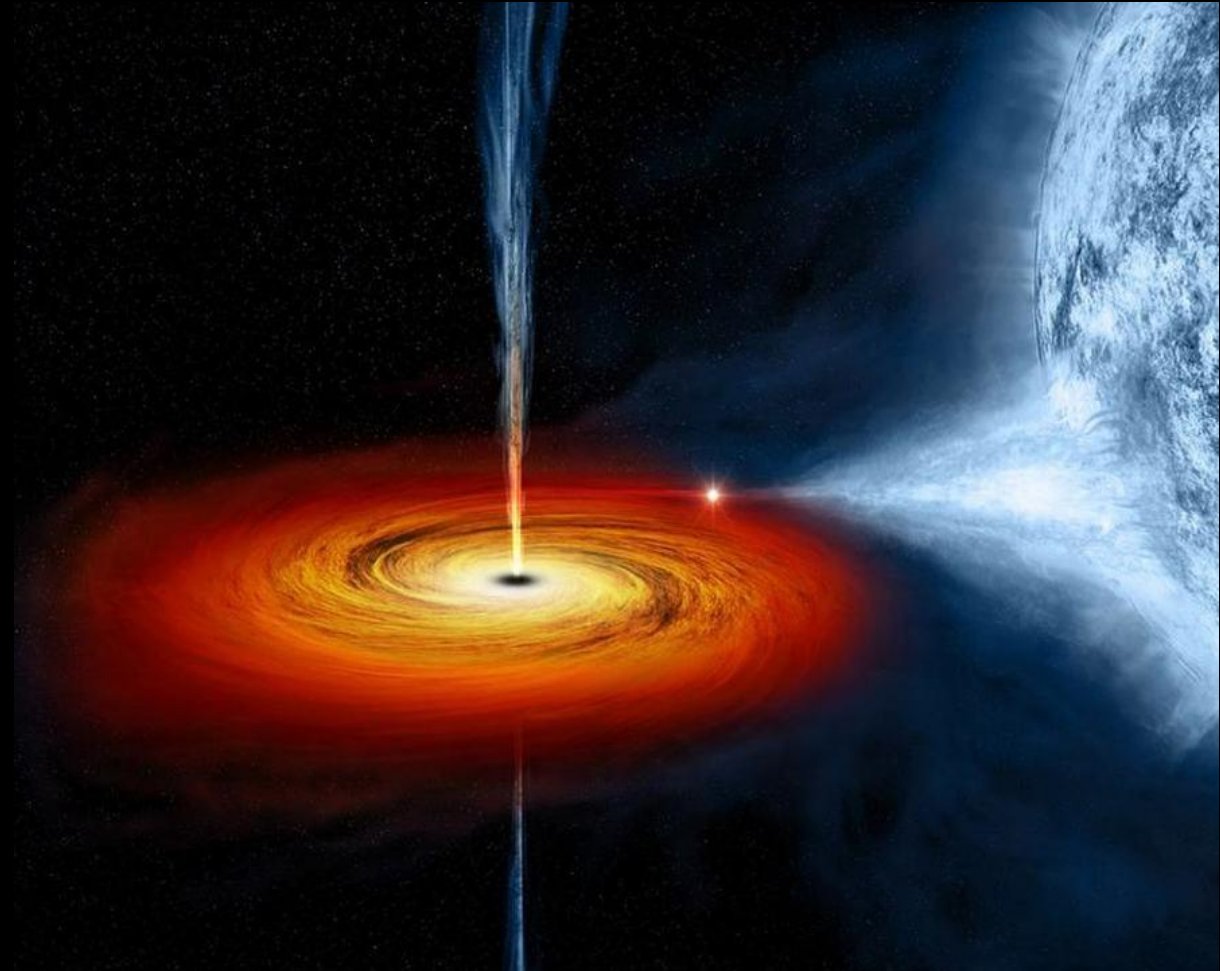


Matteo Sacchiero 5^D - A.S. 2019-2020



**I BUCHI NERI E IL CONCETTO DI SINGOLARITA'**  
**IN FISICA E MATEMATICA**

## INTRODUZIONE

I buchi neri sono tra i corpi celesti più difficili e misteriosi da osservare, la cui natura non è ancora pienamente conosciuta. Questo elaborato, dunque, ha lo scopo di esporre le odierne teorie riguardo la loro origine e la loro natura. Per capire cosa sono effettivamente i buchi neri è utile fare un passo indietro, quando fu avanzata la supposizione dell'esistenza di tali corpi celesti da parte del matematico e fisico Simon de Laplace (1749-1827). Per capire la sua ipotesi, supponiamo di avere un razzo. Se tale razzo non avesse una determinata velocità, questo non riuscirebbe a sottrarsi all'attrazione gravitazionale della terra, e ricadrebbe sul suolo. Tale velocità è detta velocità di fuga, ed è la minima velocità necessaria per lasciare il campo di attrazione gravitazionale di un pianeta. Per calcolare questo valore bisogna che l'energia cinetica attribuita al razzo e l'energia potenziale del campo gravitazionale siano controbilanciati. Quindi si ricava facilmente che:

$$v_f = \sqrt{\frac{2 G M}{R}}$$

dove M è la Massa, G la costante di gravitazione universale, e R il raggio. Se proviamo ad utilizzare i dati del nostro pianeta, abbiamo:  $V_f = [(2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{Kg}^{-2} \cdot 6 \cdot 10^{24} \text{ Kg}) / 6,36 \cdot 10^6 \text{ m}]^{1/2} = 11,2 \text{ Km/s}$ . Dunque per lasciare il campo di attrazione gravitazionale dobbiamo superare gli undici chilometri al secondo. Se proviamo a fare lo stesso calcolo per un pianeta più grande, come il sole, la velocità di fuga aumenterà sia al crescere della massa, che al diminuire del raggio. Di conseguenza più un corpo celeste è denso, maggiore velocità sarà necessaria per sfuggire alla sua attrazione gravitazionale. Considerando quindi un corpo di raggio piccolo ma di massa molto grande, la velocità di fuga sarà superiore a quella della luce. Tale è il caso del buco nero. Questa teoria fu soggetta a critiche da parte dei contemporanei, poiché ritenevano che la luce non avesse massa ma, come dimostrò successivamente Albert Einstein (1879-1955), la luce in realtà possiede una "massa dinamica", in quanto trasporta energia. Dunque abbiamo visto finora che il buco nero ha un campo gravitazionale molto intenso, ma prima di vedere come nasce tale corpo celeste, è bene fare qualche precisazione. Immaginiamo il buco nero come una pallina da biliardo, posta su un foglio di carta. Il foglio di conseguenza si piegherà verso il basso e la nostra palla da biliardo, che ha massa molto elevata, sparirà dalla nostra vista e sarà completamente avvolta dal foglio di carta. Supponendo che tale superficie sia infinitamente elastica e la massa della pallina sia elevata, la curvatura del foglio risulterà infinita. Il punto dove si trova tale massa viene chiamato dai matematici: "Punto di singolarità". Nel buco nero, infatti, le leggi della fisica perdono di ogni valore, perché le condizioni fisiche al centro del buco nero sono completamente diverse da ogni

altra realtà. E quali sono le caratteristiche che deve avere una stella per diventare buco nero? Abbiamo detto che deve avere un raggio piccolissimo, e infatti dalla formula della velocità di fuga si ricava che tale raggio deve essere minore del raggio di Schwarzschild:

$$R_s = \frac{2GM}{c^2}$$

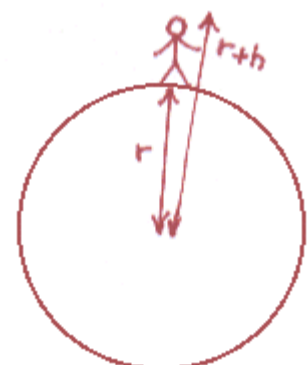
dove M è la Massa, G la costante di gravitazione universale e c la velocità della luce. Dunque se una stella collassa sotto questa precisa misura, la luce non riesce più a sfuggire dalla gravità di questo pianeta. Se utilizziamo i dati che conosciamo del sole, abbiamo:  $R_s = (2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{Kg}^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{30} \text{ Kg}) / (3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2 = 2960 \text{ m}$ . La superficie sferica centrata nel nucleo dell'astro, ed avente come raggio il valore ottenuto dalla formula scritta poco prima, viene chiamato orizzonte degli eventi, questo dunque circonda una singolarità posta al centro della sfera, dalla quale non può uscire niente.

#### LA FORZA DISTRUTTIVA DI UN BUCO NERO

E' possibile entrare in un buco nero? Entrare nell'orizzonte degli eventi sì, ma non è detto che si arrivi integri. Infatti, Avvicinandoci ad un buco nero partendo da una grande distanza, vedremo che la luce delle stelle intorno al buco nero viene distorta dal potente campo gravitazionale, ma ad un certo punto entrano in gioco le forze di marea, che inizierebbero a farci del male, fino a farci letteralmente a pezzi. Per capirne il motivo, calcoliamo la forza gravitazionale tra due corpi utilizzando la formula elaborata da Newton:

$$F = \frac{GmM}{r^2}$$

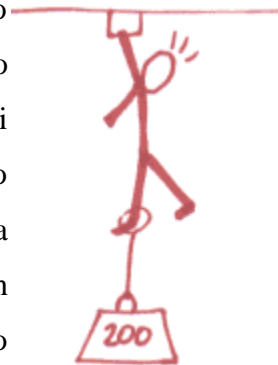
G è la costante di gravitazione universale, M e m sono le masse dei due corpi, r la loro distanza. Notiamo che la forza gravitazionale diminuisce con l'aumentare della distanza: questo significa che una mela posta in prossimità della superficie terrestre è attirata verso il suolo con più forza rispetto ad una mela che si trova a distanza maggiore. Dall'illustrazione qui a fianco quindi, possiamo dedurre che i piedi dell'omino sono attirati verso il centro della Terra con una forza maggiore rispetto alla testa, perché si trova due metri più lontana da essa. Il risultato è una forza chiamata forza di marea, che "deforma" l'omino, senza ovviamente modificarne il volume. Nella vita di tutti i



giorni non ci accorgiamo di questa forza, perché è molto piccola: è infatti equivalente al peso di quattro gocce d'acqua. Un fenomeno analogo sono le maree, causate dall'attrazione gravitazionale della luna e del sole, che innalzano il livello delle acque. Nel caso di un buco nero, la formula approssimata che esprime la forza di marea è la seguente:

$$F = \frac{2 G m M h}{r^3}$$

Se il sole dunque si trasformasse in un buco nero, alla distanza di 3000 chilometri dal suo centro, ci sentiremmo come se qui sulla Terra fossimo appesi al soffitto con 200 kg ai piedi. Avvicinandoci sempre di più al buco nero, la forza di marea ci spezzerebbe. Tuttavia nei dintorni di buchi neri molto massicci, ad esempio 1000 masse solari, che hanno dunque un raggio molto grande, le forze di marea diventano piccole, e anche un astronauta potrebbe varcare l'orizzonte degli eventi. Cosa succede a questo punto è un mistero anche per la fisica: alcuni ipotizzano che i buchi neri nascondano un cunicolo spazio-temporale, ma al momento sono soltanto speculazioni.



## BUCHI NERI ROTANTI

Finora abbiamo visto un determinato tipo di buco nero, chiamato “Buco nero statico”, ovvero che non ruota attorno al suo asse. Il fisico neozelandese Roy Patrick Kerr (1934-), rispetto a Schwarzschild, trovò un'altra soluzione alle equazioni gravitazionali di Einstein, e tale soluzione descrive un buco nero rotante e dotato di carica elettrica. Dunque gli oggetti vicini a tale massa rotante partecipano alla rotazione del buco nero per via della curvatura dello spazio-tempo. Il luogo dove tale evento si realizza è chiamato ergosfera, ma la vera particolarità di questi buchi neri è il fatto che possiedono due orizzonti degli eventi.

## LA NASCITA DI UN BUCO NERO

A questo punto risulta interessante capire quale sia l'origine di questi misteriosi corpi celesti. In breve si può dire che i buchi neri rappresentino l'ultimo stadio della vecchiaia di una stella, con massa molto più grande di quella del sole. Infatti inizialmente le stelle brillano grazie a reazioni di fusione nucleare nel loro interno, e grazie a un equilibrio tra la pressione di radiazione, generata proprio da queste reazioni e il peso degli strati esterni della stella. In questa fase la stella si trova

nella sequenza principale della sua vita. Quando la stella termina di bruciare idrogeno, la gravità prevale sulla pressione radioattiva e la stella si contrae. A questo punto il suo destino dipende dalla massa: infatti se questa è minore di quella del sole, l'enorme aumento della temperatura, a causa dell'aumento di densità, non darà modo di innescare nuove reazioni di fusione, e diventerà una nana nera spegnendosi del tutto. Se invece la massa è simile a quella del sole, si innescheranno nuove reazioni nucleari che avvengono a circa cento milioni di Kelvin, e in questa fase, detta era C-N-O, la stella continua a brillare, bruciando elio. In questo caso l'energia radiante è maggiore della pressione gravitazionale e la stella si espande fino a diventare una gigante rossa. Quando anche l'elio si esaurisce, la stella collasserà su se stessa, riducendosi allo stadio di nana bianca. Invece le stelle che superano le cinque masse solari subiscono una nuova contrazione, oltre che nuovi cicli di fusione. A questo punto l'elio fonde e, successivamente, per l'innalzamento di temperatura del nucleo, anche l'ossigeno. Il prodotto di questa reazione è il silicio, e a tre miliardi di gradi rimane il ferro, che non può subire reazioni di fusione spontaneamente. La situazione della stella quindi è del tutto instabile e la pressione radioattiva del nucleo causa esplosioni degli strati più esterni: avviene così il fenomeno della supernova e il mantello esterno, ormai esploso, dà vita a una nebulosa. Successivamente il nucleo collassa su se stesso, quindi la densità aumenta e il raggio diminuisce al punto che gli elettroni implodono sui protoni. Avviene quindi una reazione di neutronizzazione che vede come prodotti un neutrone e un neutrino:  $p + e \rightarrow n + \nu$ . Dunque ciò che rimane viene chiamata stella di neutroni. Se la massa iniziale arriva a cinquanta volte quella solare, allora i neutroni formano particelle esotiche e il nucleo si restringe fino al raggio di Schwarzschild. In questo istante i fotoni non riescono più a sfuggire al campo gravitazionale e il nocciolo rimasto svanisce nell'orizzonte degli eventi per effetto della su stessa gravità. Questo dà origine alla formazione di un buco nero.

### *LA RADIAZIONE HAWKING*

Un mito da sfatare sui buchi neri è il fatto che assorbano tutto, senza mai emettere nulla. Se fosse davvero così, tutta la materia dell'universo finirebbe in un buco nero e nel cosmo regnerebbe il silenzio. Chi sfatò questo mito fu Stephen Hawking, il quale avanzò l'ipotesi che dopo un certo periodo un buco nero rilasci materia, svuotandosi. Più in particolare, egli ipotizzò che un buco nero potesse emettere particelle sulla base delle leggi della meccanica quantistica, quindi leggi microscopiche, e non soltanto quelle macroscopiche della relatività generale. Queste particelle in realtà non superano l'orizzonte degli eventi, ma si formano immediatamente fuori dalla sfera di Schwarzschild, in quello che viene chiamato spazio vuoto. Tuttavia per il principio di Heisenberg,

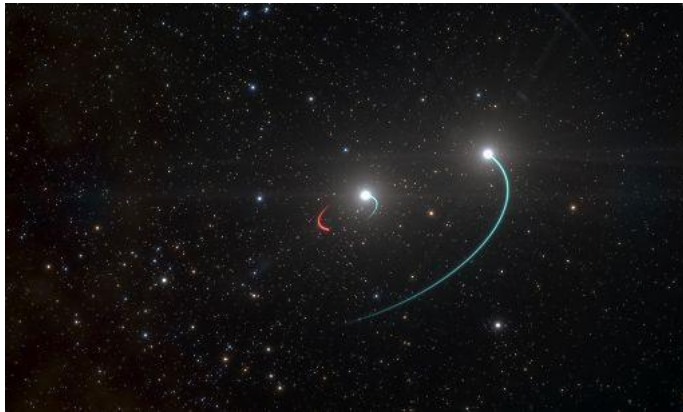
meglio conosco il valore dell'energia in un dato punto e in un dato momento, peggio conosco la velocità con la quale essa varia, e viceversa. Dunque lo spazio che viene detto "vuoto" non lo è veramente, in quanto sarebbe determinata con precisione sia il valore dell'energia, cioè zero, sia la sua velocità di variazione, che è sempre zero. Di conseguenza ci sarà una piccola incertezza sull'energia  $e$ , per  $E = m \cdot c^2$ , anche sulla materia. Nel vuoto, dunque, avverranno delle fluttuazioni quantiche, le quali formano coppie particella-antiparticella. Quindi avremo un'energia con segno positivo e un'altra con segno negativo. L'energia minore di zero però potrà esistere solo per breve tempo, e in questo caso si parla di particelle virtuali, le quali non sono rilevabili da alcun strumento. Tuttavia il campo gravitazionale del buco nero è talmente intenso che può esistere una particella reale con energia minore di zero, dunque una particella virtuale, che precipita nell'orizzonte degli eventi, diventa particella reale, mentre l'altra particella, generata insieme a questa, riesce a sfuggire al buco nero. Questa energia negativa che entra nell'orizzonte degli eventi, essendo relazionata alla massa, riduce progressivamente la massa del buco nero e, come conseguenza, il raggio di Schwarzschild diminuisce. Durante l'evaporazione del buco nero, la temperatura aumenta considerevolmente, visto che temperatura e massa di un buco nero sono inversamente proporzionali, e la radiazione che emette nello spazio prende il nome di radiazione di Hawking.

## LE APPLICAZIONI TECNOLOGICHE DEI BUCHI NERI

Recentemente, puntando un telescopio da 2,2 metri dell'MPG/ESO verso l'emisfero sud, è stato rilevato un buco nero a mille anni luce di distanza dalla terra, il che, in termini cosmici, è abbastanza vicino. La particolarità di questa scoperta è che si tratta di un sistema triplo, composto da un buco nero e due stelle. Tuttavia in precedenza tale sistema sembrava binario, e ancora prima si faticava a capire questo perché la luce delle due stelle arriva al nostro occhio come una luce unica. Quando si è riusciti a separare queste due luci, i ricercatori hanno iniziato a notare strani avvenimenti. In primis, il fatto che la stella al centro ruoti intorno a qualcosa che non si vede, che non emette luce. Tale stella deve per forza ruotare attorno a un buco nero di 4,2 volte la massa solare. Scoprire un buco nero in questo modo è piuttosto anomalo, perché solitamente ne veniamo a conoscenza quando il buco nero sta distruggendo una stella vicina. Infatti in questo momento vengono emessi due lunghi getti sono composti da particelle accelerate ad altissima velocità, per cui solitamente si vede un buco nero a causa dei raggi-X di questi getti.

Grazie a questa scoperta si potranno studiare in modo più preciso i buchi neri e, in questo modo, la teoria della relatività potrà essere continuamente controllata. Tuttavia potrebbe sorgere una domanda più che lecita: a cosa serve studiare i buchi neri? Un processo scoperto da Penrose rende

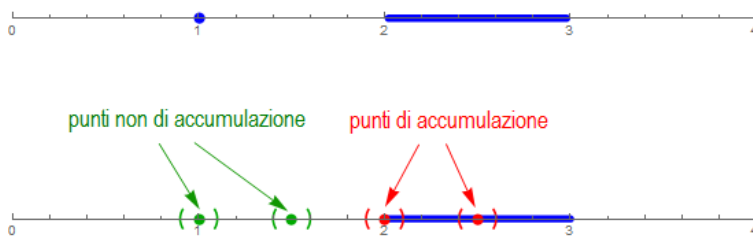
possibile estrarre energia da un buco nero rotante per mezzo di particelle che si muovono dentro e fuori l'ergosfera. La chiave di volta di questo processo avviene quando una massa informe di materia entra nel buco nero, e una volta entrata, viene divisa in due. Una di queste particelle riuscirà a sfuggire verso l'infinito, mentre l'altra passa l'orizzonte degli eventi. Quest'ultima particella diminuisce il momento angolare del buco nero rotante, e a questa riduzione corrisponde a un trasferimento di energia che potrebbe essere utilizzata.



## LA SINGOLARITA' IN MATEMATICA

Il concetto di singolarità non comprende solo il campo della fisica, ma anche quello della matematica: infatti un punto singolare è un punto in cui una funzione non risulta continua. Dando una definizione più rigorosa, diciamo che  $x_0$  è un punto singolare, appartenente ad  $\mathbb{R}$ , di una funzione reale in ciascuno dei seguenti casi. In primis, se il punto  $x_0$  appartiene al dominio della funzione, ma la funzione non è continua in  $x_0$ . In secondo luogo, se il punto  $x_0$  non appartiene al dominio della funzione, ma è di accumulazione per esso. Ricordiamo che si definisce punto di accumulazione per l'insieme  $A$ , il punto  $x_0$  tale che per ogni intorno di  $x_0$  esiste almeno un  $x$  diverso da  $x_0$  appartenente ad  $A$ .

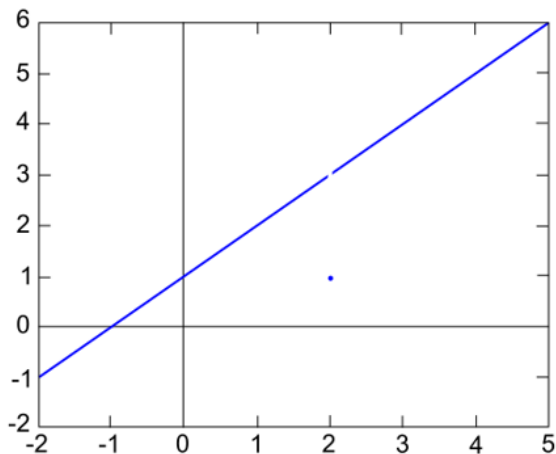
$$A = \{1\} \cup ]2,3[$$



Nel primo caso presentato, un punto singolare viene chiamato anche punto di discontinuità.

Ad esempio, data la funzione  $f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ , vediamo che  $x = 0$  appartiene al dominio della funzione, ma tale funzione non è continua per questo punto, perché  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  non esiste, mentre se calcoliamo  $f$  in 0, quindi  $f(0)$ , otteniamo  $f(0) = 1$ . Possiamo concludere che il punto  $x = 0$  è un punto di discontinuità. Mentre per il secondo caso, consideriamo  $f(x) = 2^{\frac{1}{x-3}}$ , definita quindi per  $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ . il punto  $x = 3$  non appartiene al dominio della funzione, tuttavia è di accumulazione. Dunque lo chiameremo punto singolare, ma non punto di discontinuità.

I punti singolari per una funzione possono essere classificati in tre modi: un punto può essere definito singolarità eliminabile, singolarità di prima specie (o punto di salto) e infine singolarità di seconda specie. Nel primo caso, un punto  $x_0$  è detto singolarità eliminabile per una funzione  $f$  se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  esiste finito, ma o è diverso da  $f(x_0)$  oppure  $f$  non è definita in  $x_0$ .

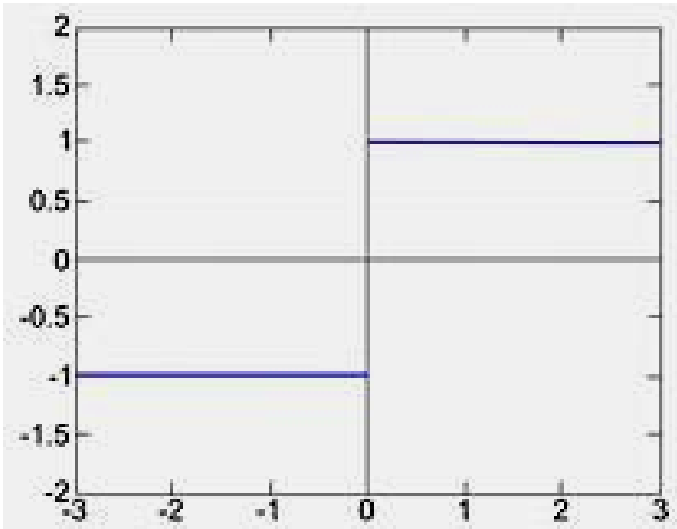


Il limite della funzione per  $x \rightarrow x_0$  esiste finito, ma è diverso da  $f(x_0)$ . Più precisamente, la funzione rappresentata è  $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \neq 2 \\ 1 & \text{se } x = 2 \end{cases}$ . Essa ha entrambi i limiti destro e sinistro uguali, ovvero:  $\lim_{x \rightarrow 2^-} x + 1 = 3$ , e  $\lim_{x \rightarrow 2^+} x + 1 = 3$ , ma tale valore non coincide con quello della funzione risolta in tale punto, infatti  $f(2) = 1$ .

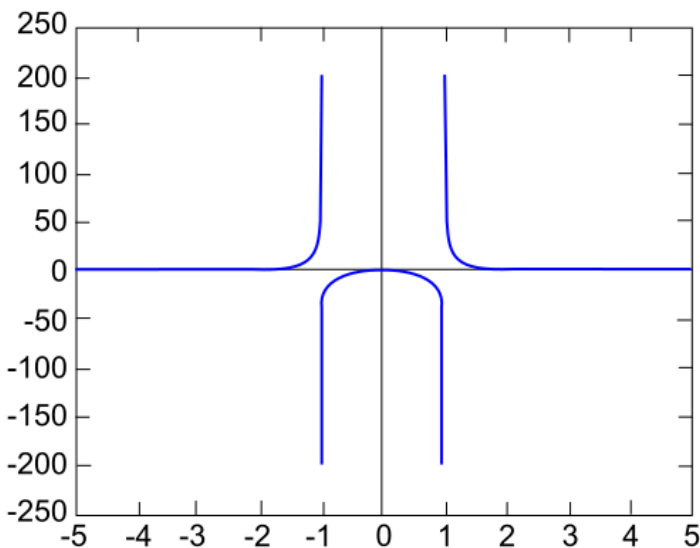
Invece un punto  $x_0$  è definito di salto per  $f$  se esistono finiti i limiti di  $f$  per  $x \rightarrow x_0^-$  e per  $x \rightarrow x_0^+$ , ma questi sono diversi tra di loro. Consideriamo la funzione  $f(x) = \frac{x}{|x|}$ , che ha dominio  $x < 0$  e  $x > 0$ .

Utilizzando la definizione di valore assoluto, avremo  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{-x} = -1$  e  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = +1$ . La funzione presenta quindi in  $x = 0$  una discontinuità di prima specie, o di salto, proprio perché a sinistra la funzione si avvicina a  $x = 0$  assumendo un valore diverso da quello che assume avvicinandosi da destra.





Nel terzo e ultimo caso, un punto singolare  $x_0$  è detto di seconda specie se almeno uno dei due limiti  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$  o  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  non esiste o è infinito. Consideriamo dunque la funzione  $f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-1}$ , questa funzione ha dominio  $x < -1$ ,  $-1 < x < 1$  e  $x > 1$ . La funzione considerata presenta nei punti  $x_1 = -1$  e  $x_2 = +1$  due punti di discontinuità di seconda specie, più precisamente:  $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2+3}{x^2-1} = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2+3}{x^2-1} = -\infty$ . In modo analogo abbiamo  $\lim_{x \rightarrow +1^-} \frac{x^2+3}{x^2-1} = -\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow +1^+} \frac{x^2+3}{x^2-1} = +\infty$ . Dunque in questo caso notiamo che per entrambi i punti è soddisfatta la condizione: “almeno uno dei due limiti  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$  o  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  non esiste o è infinito”.



## CONCLUSIONI

In conclusione, abbiamo visto che il concetto di singolarità in fisica e in matematica sono strettamente collegati, in quanto un punto singolare nel campo matematico può essere modellizzato

in fisica, come nel caso dei buchi neri. Questa singolarità, come abbiamo visto, è presente in particolare nell'orizzonte degli eventi, dove la curvatura dello spazio-tempo tende a un valore infinito.

## *INDICE*

Introduzione	pag.1
La forza distruttiva di un buco nero	pag.2
Buchi neri rotanti	pag.3
Nascita di un buco nero	pag.3
La radiazione Hawking	pag.4
Le applicazioni tecnologiche dei buchi	pag.5
La singolarità in matematica	pag.6
Conclusioni	pag.8

## *SITOGRAFIA*

[www.youmath.it](http://www.youmath.it)

[www.fmboschetto.it](http://www.fmboschetto.it)

[www.vialattea.net](http://www.vialattea.net)

[www.icra.it](http://www.icra.it)

## *BIBLIOGRAFIA*

“La matematica a colori” di

Leonardo Sasso