ESAME DI STATO 2020-2021

LICEO SCIENTIFICO CURIE

TRADATE

ELABORATO DI MATEMATICA E FISICA

ARGOMENTO: gli asintoti e la discontinuità

Candidato: Andrea Bossi

Classe: V AS

Data: 16/06/2021

INDICE

MATEMATICA - GLI ASINTOTI

L'asintoto di una funzione è una retta la cui distanza dalla funzione all'infinito tende a zero. Matematicamente l'asintoto è esprimibile come:

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - (mx + q)] = 0$$

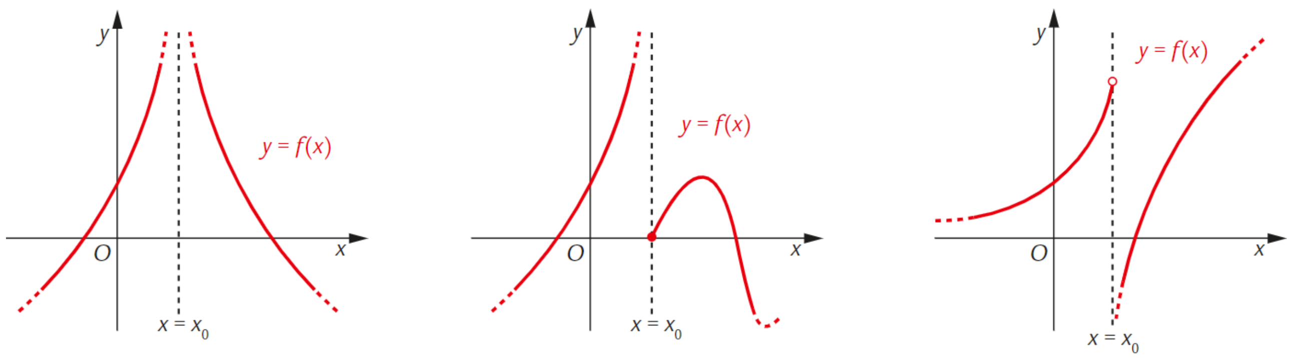
Gli asintoti sono distinti in 3 tipi fondamentali: orizzontali, verticali e obliqui. Vi è poi un quarto tipo che è l'asintoto curvilineo, di cui l'asintoto obliquo è un caso particolare. È inoltre da notare che gli asintoti si dividono a loro volta in "destro" e "sinistro" in base alla direzione verso cui tende la funzione in quel punto. In seguito analizzeremo meglio questa distinzione in relazione al tipo di asintoto.

È fondamentale ricordare il concetto di limite della funzione perché per trovare gli asintoti di una funzione serve farne il limite tendente a fattori differenti dipendentemente dal caso in esame.

L'ASINTOTO VERTICALE

Considerando una retta $x = x_0$ con $x_0 \in R$ questa è definibile asintoto verticale della funzione $f(x)$ nel caso in cui $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

In questo caso si parla di asintoto destro o sinistro in base a che la funzione tenda all'infinito rispettivamente per $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ o $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$; oppure, guardando il grafico di funzione, in base a che la funzione rispetto all'asintoto provenga da destra o da sinistra.



Nell'immagine è possibile vedere tre funzioni differenti con un asintoto verticale. Tutte e tre le funzioni si comportano in maniera differente rispetto all'asintoto:

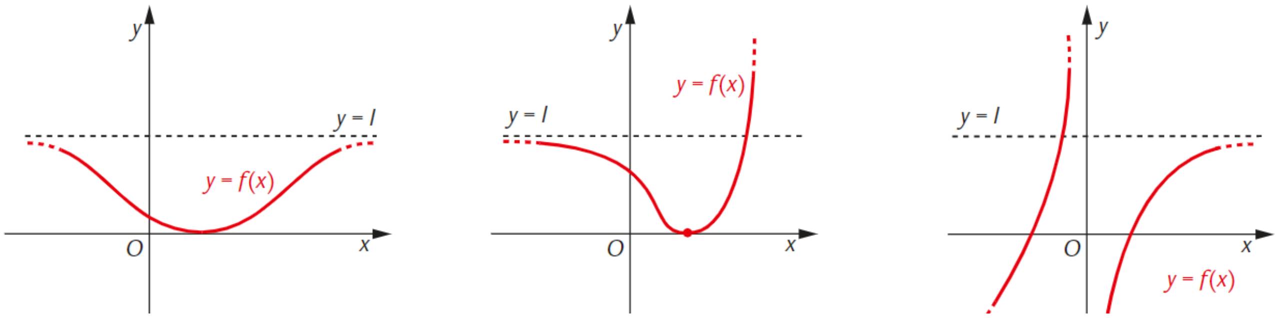
I. Per la prima funzione la retta risulta essere asintoto sia sinistro che destro perché entrambi i rami tendono all'infinito nel punto di ascissa x_0;
II. Nel secondo caso la retta risulta essere asintoto solamente per il ramo di funzione con ascissa minore di x_0 mentre è uno zero per il ramo di funzione con ascissa maggiore di x_0:
III. Nella terza figura, al contrario rispetto il caso precedente, la retta è asintoto solamente per il ramo di funzione di ascissa maggiore di x_0 mentre la funzione non è definita in x_0 per il ramo di ascissa minore di x_0 stesso.

Per individuare l'asintoto verticale di una funzione durante lo studio della stessa, bisogna fare il limite della funzione $\forall \in x_0 R|\ f(x_0) = \nexists$, quindi per quelle x per le quali si annulla il denominatore della funzione. Si può così comprendere come sia fondamentale studiare il dominio di una funzione prima di iniziare lo studio degli asintoti.

L'ASINTOTO ORIZZONTALE

Considerando una retta $y = l$ questa è asintoto orizzontale della funzione $f(x)$ in caso che $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = l$.

In quest'altro caso si parla di asintoto destro con il limite per $x \to +\infty$ e di asintoto sinistro con il limite per $x \to -\infty$; oppure guardando il grafico, in base a che la funzione abbia la retta considerata come asintoto al suo procedere verso destra o verso sinistra.



Nell'immagine è possibile vedere tre funzioni differenti con un asintoto orizzontale. Tutte e tre le funzioni si comportano in maniera differente rispetto all'asintoto:

I. Per il primo grafico la retta è un asintoto bilatero perché la limita sia a destra che a sinistra;
II. Nel secondo caso l'asintoto è orizzontale solo per il ramo di funzione con ascissa minore del punto di intersezione con l'asse X, questo è un asintoto sinistro;
III. In quest'altro caso l'asintoto è orizzontale solamente per le ascisse maggiori di 0, questo è un asintoto destro.

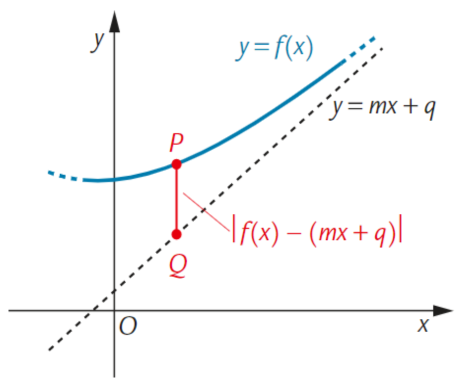
L'ASINTOTO OBLIQUO

Per definire l'asintoto obliquo esistono due definizioni: una rigorosa ed una operativa. Prima di vederle occorre precisare che l'asintoto obliquo si ha nel momento in cui l'asintoto orizzontale non esiste (quindi nel caso in cui dopo aver eseguito il limite per $x \to \infty$ il risultato finale sia ∞). L'asintoto obliquo è espresso da una retta $y = mx + q$ con $m \neq 0$ e viene definito destro o sinistro in base a che questo sia stato trovato rispettivamente per $x \to +/-\infty$.

Secondo la definizione rigorosa la retta $y = mx + q$ è asintoto obliquo di una funzione $f(x)$ nel caso in cui $\lim_{x \to \infty} |f(x) - (mx + q)| = 0$.

Si ha questo caso se il punto P appartenente alla funzione e il punto Q con stessa ascissa appartenente all'asintoto abbiano una distanza tendente allo 0 per $x \to \infty$, come mostrato nell'immagine a fianco.

Questa definizione non è operativa perché data una funzione, non permette di determinarne gli asintoti obliqui.



La definizione operativa invece prevede due passaggi, previa la verifica dell'inesistenza del limite orizzontale:

I. Anzitutto bisogna dividere la funzione per la variabile per trovare il coefficiente m. Si può intuire come questo passaggio possa avvenire solo nel caso che la differenza tra il numeratore e il (eventuale) denominatore sia di un solo grado. Quindi considerando $f(x) = \frac{(x^3+2x^2+5)}{x^2}$ il calcolo può essere applicato mentre per $f(x) = x^2$ no poiché a seguito della divisione rimarrà il termine x che quindi tenderà a ∞.

$$\lim_{x\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m$$

II. In secondo luogo bisogna determinare il coefficiente q. Per questo passaggio bisogna applicare il limite alla differenza tra la funzione e mx.

$$\lim_{x\pm\infty} [f(x) - mx] = q$$

Ottenuti questi due coefficienti la retta può essere scritta nella forma:

$$y = mx + q$$

GLI ASINOTI CURVILINEI

Negli asintoti obliqui si è visto come la differenza di grado tra numeratore e denominatore debba essere 1. Se questo non accade però non significa che l'asintoto non esista. Esistono infatti degli asintoti definiti "curvilinei" che prendono la forma non di una retta bensì della funzione corrispondente alla differenza di grado tra numeratore e denominatore (quindi se la differenza di grado è 2 si avrà un asintoto simile ad una parabola).

Il procedimento per trovare questi asintoti risulta molto simile a quello utilizzato con gli asintoti obliqui. Presupponiamo di aver già verificato che $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ e consideriamo: $\Delta=$ differenza di grado numeratore-denominatore; a-b-c-d costanti in quantità pari a $\Delta + 1$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^{\Delta}x} = a$$

$$\lim_{x\to\infty} \left[\frac{f(x)}{x^{\Delta-1}x} - ax\right] = b$$

$$\lim_{x\to\infty} \left[\frac{f(x)}{x^{\Delta-2}x} - ax^2 - bx\right] = c$$

Si procederà con questa operazione fino al punto in cui si otterrà $\lim_{x\to\infty} \left[\frac{f(x)}{x^{\Delta-\Delta}} - ax^{\Delta} - bx^{\Delta-1} - \cdots c^1\right] = d$. L'equazione dell'asintoto curvilineo sarà allora scrivibile come:

$$y = ax^{\Delta} + bx^{\Delta-1} + \cdots cx^1 + d$$

MATEMATICA - LA DISCONTINUITÀ

Prima di trattare di discontinuità di una funzione urge parlare di continuità di una funzione, per la quale serve considerare la continuità in un punto. Considerando un'equazione $f(x)$, definita nell'intorno completo di x_0, questa è continua se $\lim_{x \to x_0^{\pm}} f(x) = f(x_0)$.

Quindi la funzione è continua in un punto solo nel caso che il limite destro e sinistro della funzione siano uguali alla funzione nel punto. Nel caso che solo il limite destro o solo il sinistro siano uguali alla funzione nel punto si parlerà di funzione continua a destra o sinistra.

Date queste premesse, possiamo definire una funzione continua nel dominio o l'intervallo come una funzione i cui punti sono tutti continui nel dominio o nell'intervallo considerato (I) (con $I \subseteq D$).

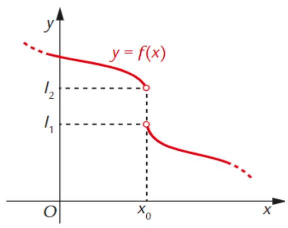
Possiamo ora passare alla discontinuità, tuttavia si incontra subito un problema: tutt'ora i matematici sono indecisi su cosa considerare o meno un punto di discontinuità. Alcuni ritengono equivalenti punti di discontinuità e punti di singolarità, mentre altri considerano punti di discontinuità solo quei punti di singolarità appartenenti al dominio, noi tratteremo di questi ultimi.

Considerando una funzione $f(x)$, il punto x_0 è di singolarità in due casi:

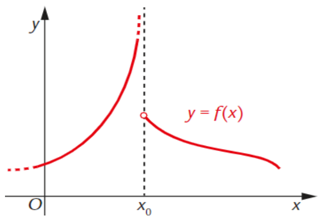
- Il punto appartiene al dominio della funzione ma questa non è continua in esso;
- Il punto non appartiene al dominio della funzione ma è di accumulazione per la stessa.

I punti che rispettano la prima ipotesi sono anche detti punti di discontinuità, ne troviamo di 3 tipi:

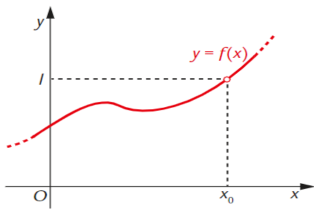
- **SINGOLARITÀ DI PRIMA SPECIE**: in questo caso dal $\lim_{x \to 0^{\pm}} f(x)$ si ottengono due risultati definiti e diversi tra loro. Con questo tipo di discontuinità il punto x_0 è detto di salto perché in esso si viene a creare un "salto" tra i due limiti trovati;



- **SINGOLARITÀ DI SECONDA SPECIE**: un punto x_0 viene definito di discontinuità di seconda specie in due casi: o almeno uno dei due limiti non esiste oppure almeno uno dei due limiti è infinito;



- **SINGOLARITÀ ELIMINABILE**: Un punto di discontinuità di terza specie si riconosce per il fatto che $\lim_{x \to x_0} f(x) = k \; con \; k \in D \; e \; k \neq f(x_0)$, oppure perché l'equazione risulta non essere definita per quel punto.



Il punto di singolarità eliminabile presenta una particolarità: può essere eliminato. Perché questa operazione sia possibile bisogna aggiungere un'equazione del tipo $f(x_0) = k$ a quella della funzione affinché si includa anche il punto individuato.

FISICA - IL CIRCUITO RL

Spesso in fisica si vedono grafici che presentano asintoti, esempi sono i grafici che rappresentano il comportamento della corrente all'interno di un circuito come il circuito RL o il circuito RC. Nella trattazione andremo a concentrarci sul circuito RL in fase di chiusura, composto da una batteria, un resistore, un induttore e un interruttore (immagine sottostante).

Consideriamo $f_{em} = -L\frac{di}{dt}$ a seguito dello studio dell'autoinduzione dell'induttore. Quindi consideriamo f_0 come la forza elettromotrice della batteria, R la resistenza del resistore, i la corrente che fluisce nel circuito e $\frac{L}{R} = \tau$. Alla luce della Prima legge di Ohm la corrente massima è $i_0 = \frac{f_0}{R}$.

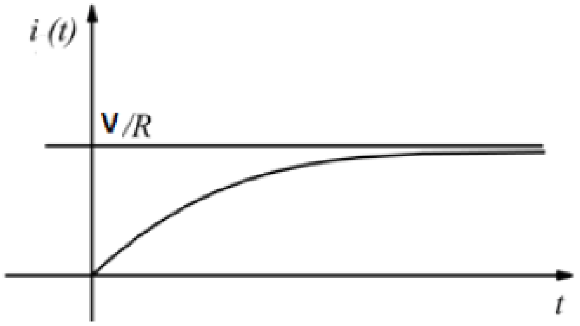
Secondo la Prima legge delle maglie di Kirchhoff si ottiene l'equazione $f_0 - Ri - L\frac{di}{dt} = 0$. Questa è un'equazione differenziale, procediamo adesso col risolverla al fine di esplicitare $i(t)$ [per ragioni di facilità di lettura e spazio i(t) verrà indicato come "i"].

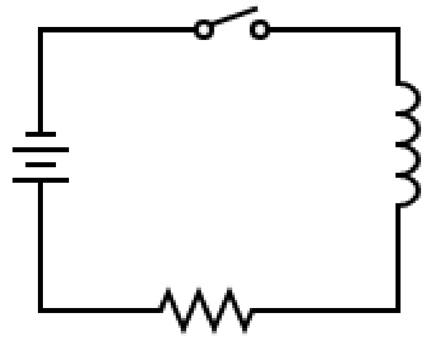
$$\frac{di}{dt} = \frac{f_0}{L} - \frac{R}{L}i = \frac{1}{L}(f_0 - Ri) \;=>\; \frac{di}{f_0 - Ri} = \frac{dt}{L} \;=>\; \int \frac{1}{f_0 - Ri}di = \int \frac{1}{L}dt$$

$$-\frac{1}{R}\ln\left|\frac{f_0 - Ri}{f_0}\right| = \frac{1}{L}t \;=>\; \ln\left|\frac{f_0 - Ri}{f_0}\right| = -\frac{R}{L}t \;=>\; -\frac{Ri}{f_0} + 1 = e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$i(t) = \frac{f_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = \frac{f_0}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Ora che si è ottenuta l'equazione dell'intensità di corrente si può procedere allo studio della stessa nel caso che t sia uguale a 0 o tendente all'infinito. Nel caso che t sia pari a 0 allora anche la corrente è nulla. Differentemente accade quando t tende all'infinito: $\lim_{t\to+\infty} i(t) = \frac{f_0}{R} = i_0$. Quindi per un tempo tendente all'infinito si otterrebbe il valore massimo della corrente ottenibile nel circuito. Il grafico che si ottiene è come quello riportato sotto.





In verità quanto abbiamo appena visto è solamente un'approssimazione matematica: nella realtà i raggiunge i_0 dopo circa 5τ. Questo "ritardo" è dovuto al fenomeno dell'autoinduzione dell'induttore che tende a generare una corrente opposta a quella che fluisce nel circuito.

Il fenomeno inverso avviene in caso che l'interruttore venga aperto, la formula è $i(t) = \frac{f_0}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$. Nel grafico si vedrà una curva speculare alla precedente che tende a 0 e non a $+\infty$. La decrescita del valore della corrente non è istantanea perché si genera corrente nell'induttore sempre per via dell'autoinduzione.

COLLEGAMENTI

Nel corso di studi di quest'anno è stato possibile ritrovare il motivo della discontinuità in più materie: anzitutto nelle scienze della Terra parlando dell'interno della Terra, quindi in arte e italiano dove si è potuta osservare una continua presa di distanza, da parte di alcuni movimenti, dal periodo precedente. Un chiaro esempio di ciò possono essere il futurismo italiano oppure l'espressionismo, in particolare tratteremo della Die Brücke cioè l'espressionismo tedesco.

ARTE

L'esperienza della Die Brücke inizia a Dresda il 7 giugno 1905 da 4 giovani studenti di architettura: Ernst Ludwig Kirchner, Erich Heckel, Karl Schmidt-Rottluff, Otto Mueller. Il nome significa "il ponte", ad indicare la loro apertura e voglia di unire innovazioni tecniche e stilistiche del tempo e del passato; tra queste v'erano la xilografia, l'acquaforte, l'incisione su lastra di metallo, il primitivismo e l'arte nera. Nel 1913 il sodalizio di questi artisti terminò ma nessuno di loro abbandonò mai davvero gli ideali che li avevano caratterizzati.

Nell'esperienza pittorica della Die Brücke, come negli altri movimenti coevi, si può ben vedere un tentativo forte di distacco dall'accademismo. Questo distacco si articola in un diverso utilizzo delle forme e dei colori, dei messaggi sottesi all'opera e modalità artistiche. In questo movimento si vede come le immagini tendano a farsi più semplici, poco dettagliate, i colori siano distribuiti con pennellate più ampie, in più sono presenti elementi di terrore, negatività, disperazione, critica sociale.

Esempio perfetto è "La ballerina" di Emil Nolde (immagine in copertina) in cui si fa ovvio riferimento alla sensualità della ragazza, intesa con accezione negativa per via della sessualizzazione agita su di lei, in ovvia contrapposizione a quelli che sono i valori tradizionali della sua danza tradizionale. La ragazza può sembrare come impazzita a causa del forte movimento, la testa reclinata all'indietro e la bocca spalancata.

SCIENZE

Nelle scienze della Terra si è avuto modo di parlare della struttura interna della Terra. Per questo studio sono stati presentati due modelli differenti: il modello chimico-geologico (basato sulle differenze chimiche degli strati) e un modello reologico (basato sulle differenze fisiche tra gli strati). Il primo modello suddivide la Terra in crosta, mantello, nucleo esterno/liquido, nucleo interno/solido.

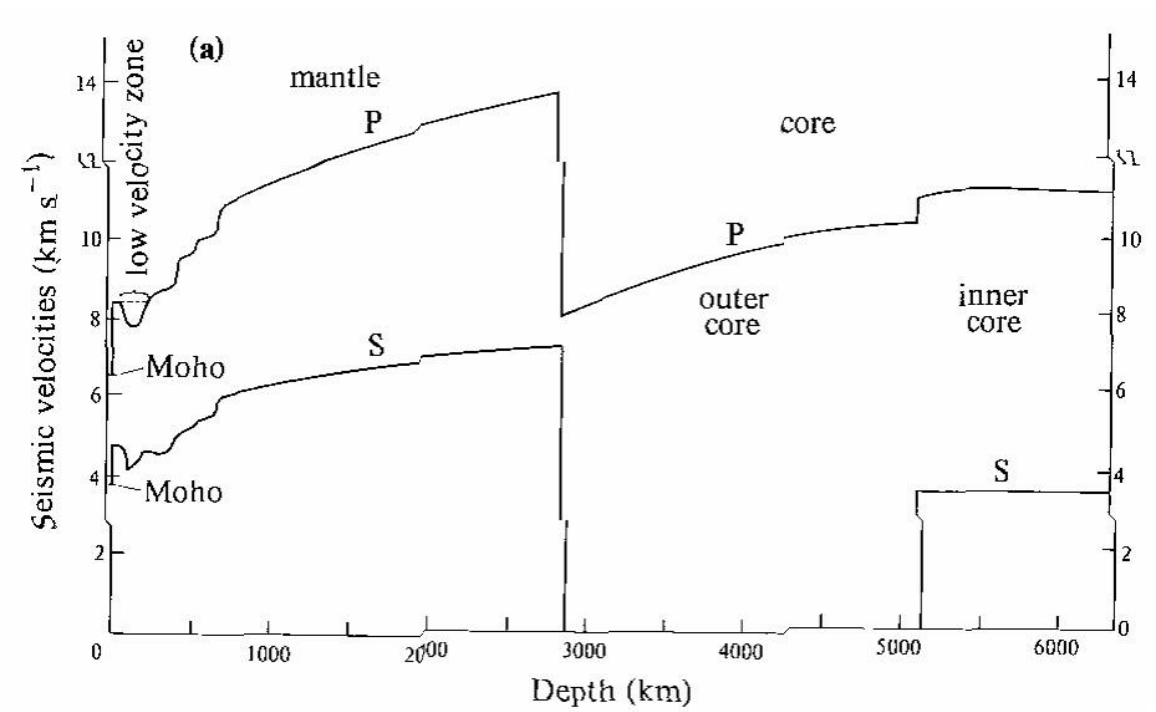
Tra questi strati sono presenti dei confini immaginari che prendono il nome di "superfici di discontinuità sismica" e sono posti in corrispondenza di profondità alle quali le onde sismiche cambiano velocità e direzione. Per lo studio anzitutto bisogna differenziare le onde sismiche in tre tipi:

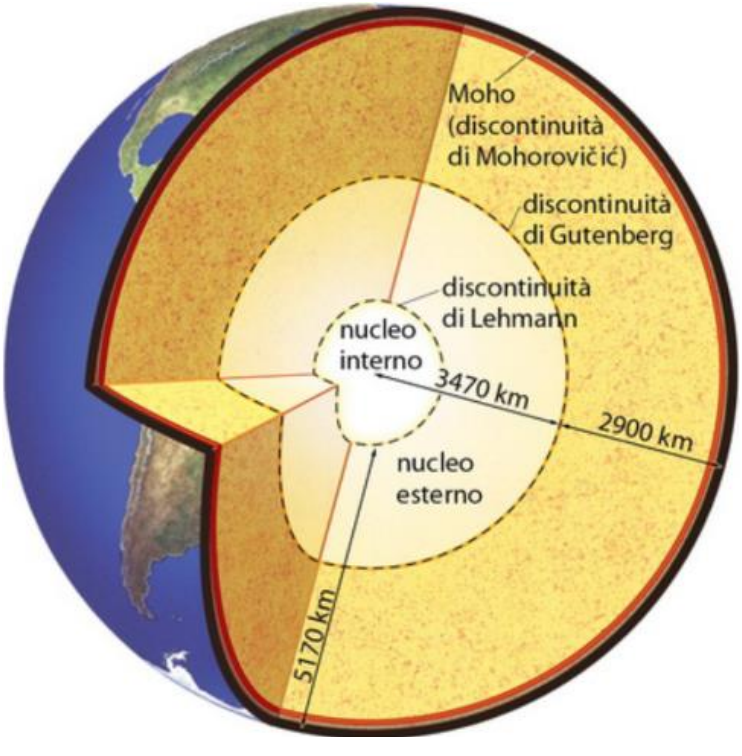
- Onde P: onde longitudinali o di compressione, sono le più veloci (tra 4 e 8 km/s) e si muovono attraverso solidi e liquidi. Le particelle di materia oscillano avanti e indietro nella direzione di propagazione dell'onda. Sono le prime ad essere percepite;
- Onde S: onde trasversali o di taglio, più lente delle onde P (tra 2 e 4 km/s), si muovono solo attraverso i materiali solidi. Oscillano perpendicolarmente alla direzione di propagazione dell'onda e cambiano la forma della roccia (ma non il suo volume). Sono percepite dopo le onde P;
- Onde superficiali: la loro forma dipende da come si sono propagate le onde P ed S, si propagano dall'epicentro (quindi in superficie). Sono leggermente più lente delle onde S (tra 2 e 3 km/s).

La prima superficie di discontinuità è localizzata tra crosta e mantello, all'incirca a 35 km sotto la crosta continentale e 7 km sotto la crosta oceanica, e prende il nome di "Superficie di Mohorovičić/Moho". A queste profondità le onde sismiche subiscono un forte rallentamento per poi riprendere gradualmente velocità.

La seconda superficie divide mantello e nucleo esterno, si trova a circa 2900 km di profondità e prende il nome di "Superficie di Gutenberg". In questo caso le onde P subiscono nuovamente un forte rallentamento mentre le S sono completamente fermate perché il nucleo esterno è liquido.

L'ultima superficie divide nucleo esterno ed interno, si trova a quasi 5200 km di profondità e prende il nome di "Superficie di Lehmann". Le onde P subiscono un'accelerazione perché penetrano in un materiale più denso che nel nucleo esterno.





BIBLIOGRAFIA E SITOGRAFIA

- Leonardo Sasso, *La matematica a colori edizione blu per il quinto anno,* De Agostini Scuola;
- Ugo Amaldi, *L'Amaldi per i licei scientifici.blu,* Zanichelli Editore;
- Elvidio Lupia Palmieri e Maurizio Parotto, *#Terra edizione verde*, Zanichelli Editore;
- L. Colombo, A. Dionisio, N. Onida, G. Savarese, *Opera 5*, Rizzoli Libri;
- Emiliano Ricci, *Atlanti scientifici FISICA*, Giunti editore;
- Galleria nazionale d'arte moderna Roma Valle Giulia, *Espressionismo tedesco: "Die Brücke"*, De Luca editore;
- https://www.matematicamente.it/staticfiles/approfondimenti/sintini-asintoti.pdf
- https://www.chimica-online.it/fisica/circuito-rl.htm (grafico della corrente);
- https://www.circuit-diagram.org/ (circuito);
- https://www.google.it/url?sa=i&url=https%3A%2F%2Fwww.moma.org%2Fcollection%2Fworks%2F92794&psig=AOvVaw2qaAOVHhYv1XtHCRRnZCEV&ust=1622470905685000&source=images&cd=vfe&ved=0CAIQjRxqFwoTCPjY36LN8fACFQAAAAAdAAAAABAJ (la ballerina).
- file:///C:/Users/andre/AppData/Local/Temp/LA%20STRUTTURA%20DELLA%20TERRA.pdf (discontinuità terra);
- https://www.google.it/search?q=velocita+onde+sismiche&tbm=isch&ved=2ahUKEwin5Yf3yPvwAhXiwQIHHZvsBpUQ2-cCegQIABAA&oq=velocita+onde+sismiche&gs_lcp=CgNpbWcQAzIECAAQGDoCCAA6BggAEAUQHjoGCAAQCBAeOgQIABAeUOO6AVjVzwFg9tABaAFwAHgAgAFhiAGECZIBAjE0mAEAoAEBqgELZ3dzLXdpei1pbWfAAQE&sclient=img&ei=HNm4YKfnOeKDi-gPm9mbqAk&bih=739&biw=1536#imgrc=LhvyB0JBkh8NQM (velocità onde sismiche).